Este libro Introducción al cálculo es una propuesta amigable de la relación entre el álgebra, la aritmética y la geometría; proporciona un material secuencial con conexión entre conceptos y aplicaciones que contribuyen a la autonomía de aprendizaje que cada estudiante debe construir.

Las herramientas de interés que muestra el texto son: resúmenes interesantes acerca de la historia de la matemática, datos curiosos que atraen al estudiante hacia una matemática divertida, ejemplos aritméticos, algebraicos y geométricos; ilustraciones que enlazan cálculos y lugares geométricos con el uso de un visualizador gráfico; recordatorio de aprendizajes previos; cuadros de errores y correcciones frecuentes que dan una retroalimentación de conceptos; ejercicios y su respectivo solucionario que fortalecen con éxito las habilidades desarrolladas en el capítulo.

El presente libro se encuentra desarrollado en función de una metodología práctica, visualmente novedosa, que da prioridad a la comprensión lógica de conceptos frente al enfoque memorístico, y se enfoca de acuerdo a los resultados de aprendizaje planteados para los estudiantes de primer año de las carreras de Ciencias Económicas (FACEA) e Ingeniería (FICA), de la Universidad de Las Américas.

ISBN: 978-9942-779-15-1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO - Guía de ejercicios

Washington Álvaro Lugo - Mónica Calle Jiménez

INTRODUCCIÓN *al cálculo*

Washington Álvaro Lugo - Mónica Calle Jiménez

∞

=

Σ

≈

−

×

{ıntℝφdx.a∫.Cα∫cu∫φ}

÷

≠

≥

%

dx

∅

Guía de ejercicios

ruta ediciones

Introducción al

CÁLCULO

Introducción al cálculo
GUÍA DE EJERCICIOS

Washington Álvaro Lugo
Mónica Calle Jiménez

ESCUELA DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
udla

ruta

La colección *Ruta* comprende libros de estudio, cuadernos de ejercicios y actividades, guía para docentes, textos didácticos y cualquier otro material de apoyo que enriquezca el proceso enseñanza-aprendizaje de estudiantes de educación media y superior. Fue creada con el propósito de acompañar a sus lectores en el camino del aprendizaje continuo.

Introducción al cálculo. Guía de ejercicios
©Washington Álvaro Lugo, Mónica Calle Jiménez

© Universidad de Las Américas
Facultad de Formación General
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Campus Queri, José Queri y Avenida de Los Granados
www.udla.com
Facebook: @udlaQuito
Quito, Ecuador

Primera edición: septiembre, 2019

CUIDADO DE LA EDICIÓN
Coordinación Editorial UDLA

CORRECCIÓN Y ESTILO
Adriana Salgado

DISEÑO DE CUBIERTA
David Sánchez

DIAGRAMACIÓN
María Leticia Espinosa
La pieza clave

EDITORIAL
Udla Ediciones

IMPRESIÓN
Nombre de imprenta

ISBN: #

Impreso en Quito, Ecuador

Previa a su publicación, esta obra fue evaluada bajo la modalidad de revisión por pares anónimos.

Contenido

Estructura del libro

Fundamentos matemáticos para lograr el éxito

El libro de *Introducción al cálculo* se enfoca en proporcionar las herramientas necesarias para que el estudiante consolide los conceptos con base en materiales de estudio e investigación, teniendo como apoyo una recopilación de ejemplos, ejercicios y el graficador en línea Geogebra, que permite interiorizar las ideas algebraicas con una fundamentación geométrica.

Cada capítulo contiene los siguientes elementos: objetivos, contenidos y una reseña histórica, los mismos que constituyen resúmenes de aspectos interesantes relacionados con la historia de la matemática, con el fin de poner en contexto el desarrollo del capítulo.

CAPÍTULO 1 : Fundamentos

Objetivos:

1.1. Indentificar, conocer y aplicar propiedades de los números reales.
1.2. Simplificar expresiones con el uso de propiedades de exponerles y radicales.
1.3. Comprender la definición de valor absoluto.
1.4. Operar y simplificar expresiones algebraicas.

Contenidos:

En este capítulo el estudiante encontrará los siguientes contenidos:

- Clasificación de los números reales.
- Representación gráfica de los números reales.
- Propiedades de los números reales.
- Conjuntos e intervalos de números reales.
- Propiedades de exponentes y radicales.
- Conceptos de valor absoluto.
- Expresiones algebraicas.

Reseña historica:

Desde el inicio de los tiempos los seres humanos dedicaban su tiempo a la caza y luego a cuidar de sus rebaños. Ellos necesitaban adoptar estrategias para saber si sus animales disminuían o incrementaban. Con el tiempo empezaron a utilizar el lenguaje corporal incluyendo manos y elementos de apoyo para deteminar cantidades o valores.

Desde hace unos 5000 años, la mayoría de las civilizaciones han utilizado un sistema de numeración decimal: en primer lugar, la egipcia con sus jeroglíficos, y con posterioridad, la griega, la china, entre otras. (Arjona, 2017).

Personaje: Leonhard Euler

Basilia, Suiza, 1707
San Petersburgo, 1783
Matemático suizo.

Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del patriarca de los Bernoulli.

Tras graduarse en dicha institución, en 1723, se convirtió en asociado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde coincidío con otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel, a quien en 1733 relevó en la cátedra de matemáticas. A causa de su exterma dedicación al trabajo, perdío la visión del ojo derecho, hecho que no afectó ni a la calidad ni al número de sus hallazgos.

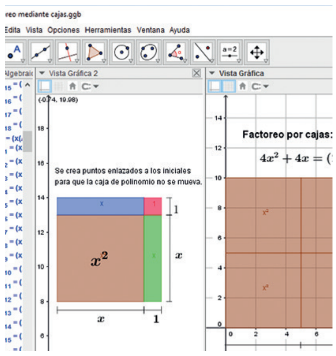
Hasta 1741, refinó los métodos y las formas del cálculo integral. En 1748 publicó la obra *Introductio in analysim infinitorum*, en la que expuso el concepto de función en el marco del análisis matemático. En el ámbito de la geometría desarrollo conceptos básicos como el *ortocentro*, el *circuncentro* y el *baricentro* de un triángulo; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos. En el terreno del álgebra realizó la reducción de una ecuación cúbica a una bicuadrada y el de la determinación de la constante que lleva su nombre. Tras su muerte, se inició un ambicioso proyecto para publicar la totalidad de su obra científica, compuesta por más de ochocientos tratados, lo cual lo convierte en el matemático más prolífico de la historia. (vidas, 2017)

Las páginas de cada capítulo cuentan con dos columnas: en el lado derecho tenemos los contenidos, resúmenes y ejemplos aritméticos y algebraicos; mientras que en el lado izquierdo se observan algunas herramientas para el éxito de la consolidación de fundamentos matemáticos.

Herramienta 1

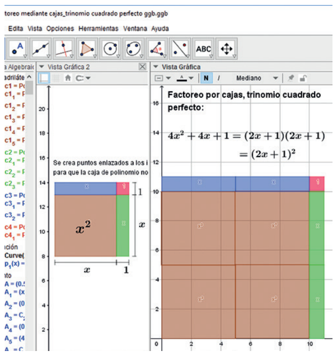
En esta figura se muestran las ilustraciones que enlazan los cálculos con lugares geométricos, estos son realizados en el programa dinámico Geogebra, en donde el objetivo es que el estudiante tenga una visión gráfica de sus cálculos.

Ilustración 9: Gráfica de factores por cajas



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 20: Gráfica de trinomio cuadrado perfecto



Fuente: Geogebra 2017

Factorización:

Factorizar una expresión algebraica significa dejar a la expresión en producto de términos más simples. (Stewart, 2009)

FACTORIZACIÓN $\rightarrow (x^2 - y^2) = (x + y)\,(x - y)$

De la expresión anterior, se concluye que: $(x + y)$ $(x - y)$ son factores de: $(x^2 - y^2)$

El caso más sencillo de factorización se da cuando los términos tienen un factor común, por ejemplo:

- $2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1)$
  Donde "2" es el elemento común
- $2x^2y + xy^3 = (x\,y)(2x + y^2)$
  Donde "xy" es el elemento común
- $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = 2xy^2\,(4x^3 + 3x^2y - y^2)$
  Donde "$2xy^2$" es el elemento común

Fórmulas de factorización especial

Si A y B son números reales o expresiones algebraicas, entonces.

1. $A^2B - AB^2 = AB\,(A - B)$ Factor común.
2. $A^2 - B^2 = (A + B)\,(A - B)$ Diferencia de cuadrados.
3. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ Trinomio cuadrado perfecto.
4. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ Trinomio cuadrado perfecto.
5. $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$ Factor común por agrupación y trinomio cuadrado perfecto.

Herramienta 2

En esta figura se muestran dos secciones usadas como herramienta de estudio:

-"Recuerda que"-, nos ayuda a volver a algunos conocimientos previos y necesarios para el aprendizaje.

-"Errores y correcciones frecuentes"- nos mantendrá alerta de equivocaciones sobre algunas que a menudo se cometen en fundamentos matemáticos, además, nos ayudará con la retroalimentación de los conceptos.

Recuerda que:

Número periódico puro:

a. $0{,}333... = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9}$

b. $0{,}777... = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}$

c. $3{,}2323... = \frac{323-3}{99}$

Número periódico mixto:

d. $5{,}175454... = \frac{51754-57}{9900}$

e. $3{,}2713838... = \frac{327138-3271}{99000}$

$3{,}2713838... = \frac{323867}{99000}$

Errores y correcciones frecuentes

Error: $0{,}3\overline{3} \rightarrow$ Irracional
Corrección: $0{,}3\overline{3} \rightarrow$ Racional

Error: $e \rightarrow$ Racional
Corrección: $e \rightarrow$ Irracional

e. φ (phi) – 1,618033988749
f. e (número de Euler) – 2,718281828459

Todos los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y, por lo tanto, no pueden ser expresados como raciones.

El número racional es el que se puede escribir como número fraccionario tal que su razón tiene un número finito de decimales, por ejemplo:

$$\frac{15}{2} - 7{,}5$$

Todos los números racionales tienen forma decimal, a la que se la llama *decimal periódico*; ejemplo:

$$\frac{1}{4} = 0{,}250000 = 0{,}25\overline{0}$$

Ejemplos de clasificación de los números reales:

1. Dado el conjunto de elementos:
2. Poner un visto (√) al conjunto numérico que corresponde:

$$\left\{ -10.5\,;\ \frac{27}{2}\,;\ 0{,}53\,;\ \sqrt{7}\,;\ -\frac{1}{3} \right\}$$

Herramienta 3

«Dato curioso» contiene información para que el estudiante se vea envuelto en una matemática interesante y divertida.

Dato Curioso

Personaje:
John Napier

Edimburgo, 1550
Reino Unido, 1617
Matemático escocés.

Fue un terrateniente escoses cuyo pasatiempo eran las matemáticas. Lo conocemos hoy en día debido a su invento: los logaritmos que publicó en 1614 bajo el título *Description of the marvelous Rule of Logarithms (Una descripción de la Regla maravillosa de los logaritmos.).* En la época de Napier, los logaritmos se utilizaban exclusivamente para simplificar cálculos complicados. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes se escribían como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo:

$$\approx 10^{3,6562} \cdot 10^{4,76180}$$

$$\approx 10^{8,41809}$$

$$\approx 261872564$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (simplemente se suman sus exponentes). Napier produjo tablas extensas que dan los logaritmo.

$$= \log_2 (x - 1)^{1/3} - \log_2 x^{1/2}$$

$$= \log_2 \sqrt[3]{x} - 1 - \log_2 \sqrt{x}$$

$$= \log_2 \left(\frac{\sqrt[3]{x - 1}}{\sqrt{x}} \right)$$

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en las que la incógnita aparece afectada por un logaritmo. Por ejemplo:

$$\log_2 (x - 1) = 5$$

Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:

$$\log_2 x = \log_2 y \rightarrow x = y$$

$$\log_2 b = x \rightarrow a^{1/2} = b$$

Para la resolución de ecuasiones logarítmicas, se presentan los siguientes métodos.

Por propiedad
$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$

$\log_2 (x - 2) - \log (x - 11) = 1$

$\log_2 (x + 2) + \log_2 (x - 4) = 3$

Ejercicios

Cada sección contiene un conjunto de ejercicios para fortalecer los fundamentos matemáticos, revisados; esto permitirá al estudiante constatar si ha logrado alcanzar con éxito las habilidades desarrolladas en el capítulo.

Los ejercicios propuestos son un conjunto de operaciones aritméticas, algebraicas y relación gráfica en el programa dinámico Geogebra.

Ejercicios 1.1 a Números Relaes

1. Completa:

Número	Número opuesto	Número inverso
$-\frac{2}{5}$		
-5		
$-t$		

2. Escribe el número entero anterior y siguiente de:

   a. 4
   b. -4
   c. 6,5
   d. -3

3. Escribe <, >, según corresponda:

   a. $2\frac{1}{2}$ —— $2\frac{2}{3}$ b. $2\frac{2}{3}$ —— $-2\frac{4}{5}$

   c. $4,5$ —— $4,05$ d. $3\frac{1}{4}$ —— $\frac{13}{4}$

4. Determina que número se encuentra en la mitad de:

   a. 3,5 y 7 d. $-\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$

5. Poner un (√) al conjunto numérico que corresponda:

	N	Z	Q	I	R
121					
$-\frac{2}{5}$					
$-\frac{1}{3}\pi$					
$\sqrt{2}$					

6. Determina la forma decimal de los siguientes números racionales:

   a. $\frac{5}{9}$ b. $\frac{14}{5}$ c. $-\frac{3}{8}$

7. Determina la fracción simplificada de los siguientes números decimales:

   a. 0,25 d. 2,65
   b. 1,3 e. 1,3
   c. –0,65 f. 1,24

8. ¿En qué casos es un número racional mayor que su opuesto, en qué caso es menor que su opuesto?

9. Escriba en palabras lo que representa cada literal.

a. $a > 0$
b. $a < -3$

Excursiones matemáticas

Al final de cada capítulo se presentan ejercicios de aplicación encaminados a la utilización de los conceptos estudiados.

El objetivo de estos es desafiar al estudiante en la resolución de problemas que involucre, el desarrollo del pensamiento lógico-complejo.

Excursiones matemáticas:

1. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdadersa o falsas:

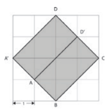
a. Toda potencia cuyo exponente es par tiene signo positivo.
b. Al elevar una fracción propia a un exponente negativo, se obtiene una fracción impropia.
c. Al dividir un número para cero, el resultado es el mismo número.

2. Encuentra los valores de estas series de potencias y contesta:

- $1^2, 1^6, 1^{20}, 1^{-2}, 1^{-6}, 1^{-20}$
- $(-1)^1, (-1)^2, (-1)^5, (-1)^7, (-1)^8$
- $(-1)^{-1}, (-1)^{-2}, (-1)^{-5}, (-1)^{-7}, (-1)^{-8}$

a. ¿Cuanto valen todas las potencias de base 1? ¿Influye el valor de exponente?
b. ¿Cuanto valen todas las potencias de base -1 y exponente impar?
c. ¿Cuanto valen todas las potencias de base -1 y exponente par?
d. ¿Cuál será el resultado de $(-1)^{-2222}$ y $(-1)^{-22266}$?

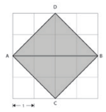
3. En la figura compara el largo de AB y de AC + CB:



- $\sqrt{8+8}$y $\sqrt{8}+\sqrt{8}$

a. ¿Cuál es la longitud más grande?
b. ¿Cálcula las longitudes y compara?

4. Cálcula, compara y determina una conclusión:



a. $\sqrt{9+16}$y$\sqrt{9}+\sqrt{16}$
b. $\sqrt{25-16}$y $\sqrt{25}-\sqrt{16}$

Solucionario

En la parte final del libro se encuentran las respuestas de todos los ejercicios planteados.

CÁPITULO 1

Ejercicios 1.1 Números relaes

1.

Número	Número opuesto	Número inverso
$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$
- 8	8	$-\frac{1}{8}$
- t	t	$-\frac{1}{8}$
$\frac{P}{q} : (q \neq 0)$	$-\frac{P}{q}$	$\frac{P}{q}$

2.

a. 3 y 5
b. -5 y -3
c. 6 y 7
d. -4 y -3

3.

a. $2\frac{1}{2} < 2\frac{2}{3}$
b. $-2\frac{2}{3} > 2\frac{4}{5}$
c. $4{,}5 > 4{,}05$
d. $3\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

c)	N	Z	Q	I
0,111			√	
$\frac{124}{99}$			√	
$\frac{56}{45}$			√	
3^{-5}				√

4.

	N	Z	Q	I	R
$-\frac{3}{4}$		√	√		√
$\sqrt{169}$		√	√		√
$\frac{2}{3}\pi$				√	√
0.65			√		√
0		√	√		√

5.

a. 0,5
b. 2,8
c. -0,375

6.

Los números racionales positivos son mayores a sus opuestos, excepto el cero.

Los números racionales negativos son menores a su opuestos, excepto el cero.

Introducción

El presente libro de *Introducción al cálculo* es una herramienta para fortalecer aprendizajes adquiridos en el nivel medio. Su enfoque es lograr que los estudiantes obtengan un resultado óptimo en la aplicación de situaciones cotidianas, todo esto se lo presenta de manera esquemática y resulta de mucha utilidad para los estudiantes de primer año de las carreras de Ciencias Económicas e Ingeniería, entre otras.

Los propósitos del libro de *Introducción al cálculo* son:

a. Brindar un material secuencial con enlace entre conceptos, ejemplos y ejercicios, que contribuya a un aprendizaje significativo y autónomo de los estudiantes, en función de una metodología práctica, visualmente novedosa.

b. Relacionar las unidades didácticas de la aritmética y el álgebra con representaciones del espacio, para lo cual se utiliza el programa gráfico en línea.

c. Dar una retroalimentación en función de errores comunes detectados en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

La estructura del libro enlaza eventos numéricos y algebraicos con lugares geométricos. Proporciona elementos conceptuales en forma de cuadros, tablas e ilustraciones, lo que hace dinámico al texto. Cuenta con una variedad de ejercicios para una práctica constante; ofrece reseñas históricas y datos curiosos que contextualizan cada capítulo abordado.

La geometría es una parte de las matemáticas que surge como resultado de la necesidad de construir, seccionar y medir tanto territorios como edificaciones; destaca el aprendizaje de las características del plano, lugares geométricos y cuerpos geométricos. Uno de sus objetivos es resolver problemas de dimensiones y de espacio. El enlace con el álgebra se produce debido al requerimiento de representar figuras geométricas en forma de ecuaciones que desarrollan resultados frente a una necesidad concreta.

En sus inicios, el álgebra fue considerada, de cierta manera, como una extensión de la aritmética que estudiaba relaciones y cantidades. Para establecer formas generales, en el álgebra se introdujo símbolos que habitualmente son letras, estas representan elementos, variables o procesos cambiantes que concluyen en fórmulas algebraicas cuyo objetivo es desarrollar un razonamiento matemático y obtener resultados aplicados a la cotidianidad.

El texto consta de cinco capítulos. En el primer capítulo se exhibe los fundamentos de introducción al cálculo iniciando con los números que son la base de las matemáticas, y que históricamente se han desarrollado debido a la necesidad del conteo en las primeras comunidades. Se encuentran los conjuntos numéricos con sus respectivas propiedades y representación de lugares geométricos a través de expresiones algebraicas. Se plantea mantener la práctica constante trabajando con el programa gráfico en línea y con una recopilación de ejercicios propuestos referentes al tema. El objetivo es lograr que el estudiante mantenga un interés constante en la recepción del aprendizaje numérico y algebraico con una visión gráfica-geométrica.

El segundo capítulo se presenta en dos partes. En la primera se aborda la trigonometría que ha sido utilizada principalmente para construcciones desde hace 3000 años, aproximadamente. Aquí se abordan las características de ángulos, triángulos, relaciones trigonométricas e identidades trigonométricas que serán una herramienta de gran utilidad y apoyo para el cálculo diferencial e integral. En la segunda se presenta los números complejos que serán explicados de una forma clara y precisa como extensión de los números reales, sus características y formas de representación acompañados de la práctica con ejercicios. El objetivo de este capítulo es consolidar la base de la trigonometría y los números complejos para que sean un aporte óptimo hacia las siguientes actividades matemáticas.

El tratamiento de ecuaciones se estudia en el tercer capítulo, las mismas que han sido utilizadas desde la antigüedad, inicialmente como elementos de ayuda en la distribución de alimentos, tierras, animales, etc., y sobre los que, con el tiempo, los investigadores matemáticos han desarrollado clasificaciones y métodos de resolución. Se aborda el análisis y desarrollo de ecuaciones polinómicas, racionales, con valor absoluto, logarítmicas y exponenciales, que le permite al lector tener una herramienta para el desarrollo del razonamiento matemático y obtener resultados que pueden ser aplicados a problemas de la sociedad.

En el cuarto capítulo se presenta las desigualdades que, en su origen, fueron utilizadas para establecer cantidades superiores, inferiores, máximas o mínimas. Posteriormente, se han realizado varios estudios sobre las mismas y en la actualidad se tiene textos exclusivos para su análisis. En este capítulo se trabaja en los métodos de solución, las diferentes formas de representación de sus resultados y en el análisis numérico y gráfico del conjunto solución. El objetivo es permitir al estudiante diferenciar la desigualdad de una ecuación, reforzar la práctica en sus operaciones y comunicar el resultado de manera eficiente para que pueda ser aplicado en situaciones concretas.

Finalmente, en el quinto capítulo, se trabaja la recta como un lugar geométrico, sus características y formas de representación. Se estudia a la recta como función y se brinda la apertura de trabajo de la ecuación lineal con formas gráficas, además de sostener la práctica en los criterios de representación, análisis y cálculo en los problemas del entorno social.

Los contenidos desarrollados están diseñados bajo los siguientes objetivos didácticos:

- Presentar una estructura clara y precisa de los contenidos utilizando mapas mentales y conceptuales, así como resúmenes de conceptos y propiedades.
- Relacionar la aritmética, geometría y álgebra, como una herramienta que contribuya al pensamiento matemático.
- Integrar el conocimiento matemático a situaciones concretas.
- Valorar la matemática como instrumento útil para comprender el mundo que nos rodea.

Hemos realizado este trabajo como un conjunto de saberes y aprendizajes que recopila actividades visuales y descriptivas para el lector. Nuestra experiencia como docentes, durante estos últimos 15 años, nos ha dado la certeza de que el estudiante estimula su aprendizaje cuando las herramientas que usa son visualmente amigables y proyectadas hacia una aplicación, y esto es lo que proponemos en el presente documento, por tanto, esperamos que sea una base sólida de apoyo para todo estudiante de nivel superior.

Los autores

CAPÍTULO 1 : Fundamentos

Objetivos:

1.1. Indentificar, conocer y aplicar propiedades de los números reales.
1.2. Simplificar expresiones con el uso de propiedades de exponerles y radicales.
1.3. Comprender la definición de valor absoluto.
1.4 Operar y simplificar expresiones algebraicas.

Contenidos:

En este capítulo el estudiante encontrará los siguientes contenidos:

- Clasificación de los números reales.
- Representación gráfica de los números reales.
- Propiedades de los números reales.
- Conjuntos e intervalos de números reales.
- Propiedades de exponentes y radicales.
- Conceptos de valor absoluto.
- Expresiones algebraicas.

Reseña histórica:

Según Arjona (2017), los seres humanos, para sobrevivir, hicieron uso de la caza, pesca, recolección de plantas silvestres y luego criaron animales, todo esto con el uso de instrumentos de su creación, que fueron desarrollando. Luego de un tiempo, el ser humano se vio en la necesidad de crear objetos que determinaran cantidades, para así acoger técnicas que le permitieran saber si sus reservas aumentaban o disminuían. Arjona señala que, aproximadamente 5000 años atrás, las agrupaciones de seres humanos ya hacían uso de jeroglíficos para el conteo, y se piensa que los pioneros de este método fueron los Egipcios.

Personaje:

Leonhard Euler

Leonhard Euler fue un matemático nacido en Suiza, en 1707 y fallecido en San Petersburgo, 1783 (Biografías y vidas, s/f).

Euler tuvo habilidades con los números desde muy pequeño, y a los 13 años ingresó a la Universidad de Basilia. Fue amigo de familia Bernoulli, quienes, en ese tiempo, ya se consideraban los matemáticos más importantes de Europa. Recibió tutorías con Johann Bernoulli que fue de gran influencia sobre el desarrollo matemático de Euler ya que encontró en él un gran talento para los números. En 1726 concluyó con su doctorado que trató sobre la propagación del sonido.

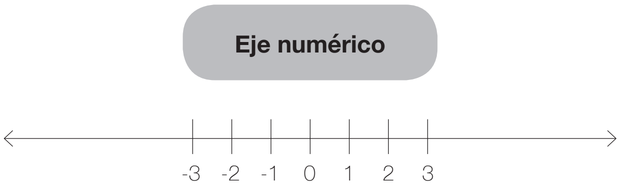
Euler trabajó en la Academia de Ciencias en San Petersburgo. En 1741 trabajó para la Academia de Berlín, lugar en el que redactó más de 300 artículos y algunas de sus principales obras en teoría de números, funciones matemáticas, geometría, trigonometría y física. A él se le debe la modernidad de representar términos matemáticos y físicos en aritméticos. Por causa de su excesivo trabajo, perdió parte de su visión, pero esto no tuvo influencia en la máxima calidad de sus trabajos.

Luego de su muerte, comenzó un importante proyecto para la publicación de la totalidad de sus escritos científicos, que se compone de más de 700 artículos y tratados; todo esto lo convierte en el matemático más productivo de la historia.

1.1. Números reales

Los números reales se pueden expresar por medio de puntos en el eje numérico:

Ilustración 1 Recta real.



El punto 0 (cero) se denomina origen de valores positivos y negativos.

Una dirección positiva y negativa se indica con una flecha dirigida hacia la derecha y la izquierda respectivamente.

Por lo general se representa el eje numérico dispuesto de forma horizontal, y se toma como valores positivos a los números que están a la derecha del origen 0, y como valores negativos a los que están a la izquierda del origen 0.

Dos números reales diferentes están representados en el plano por dos puntos, o dos lugares diferentes; esto quiere decir que cada punto del eje numérico le corresponde un solo número real. Adicionalmente, entre dos números reales o puntos en el eje numérico, siempre hay otro número real.

Los números reales forman un conjunto denotado con el símbolo **R**, y los subconjuntos que contiene son números racionales e irracionales, números enteros y números naturales (Stewart, 2009).

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$

$Z = \{...-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

$Q = \{ \frac{a}{b}, a \in Z ; b \in Z ; b \neq 0 \}$

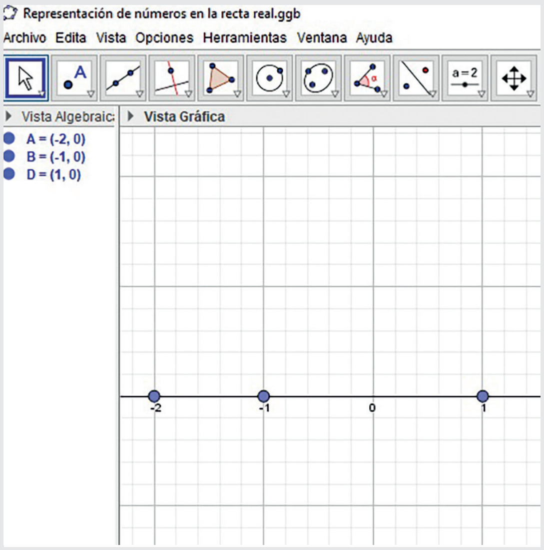
I = no se puede expresar como cociente de dos números enteros.

Dato Curioso

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el número y surgió en la antigüedad ampliándose y generalizándose con el tiempo.

Los números reales se inventaron para cumplir con necesidades específicas. Por ejemplo: contar, describir deudas o medir ciertas distancias.

Ilustración 2
Ubicación de números enteros en la recta real.



Fuente: Geogebra 2017

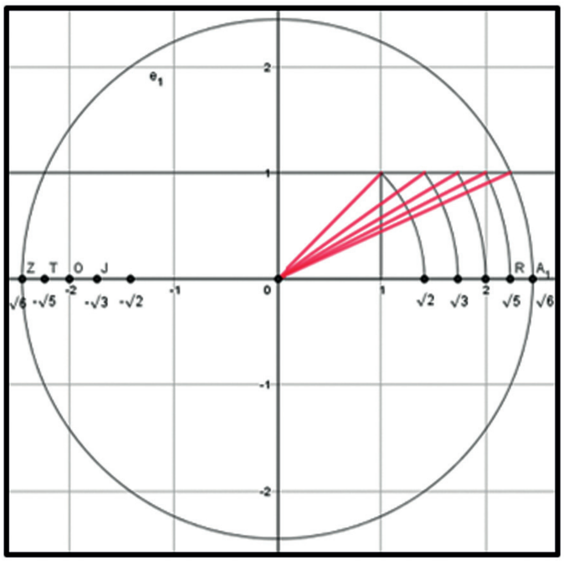
Nota

Puede descargar el programa Geogebra en el siguiente enlace:

https://Geogebra.softonic.com/descargar

Ilustración 3

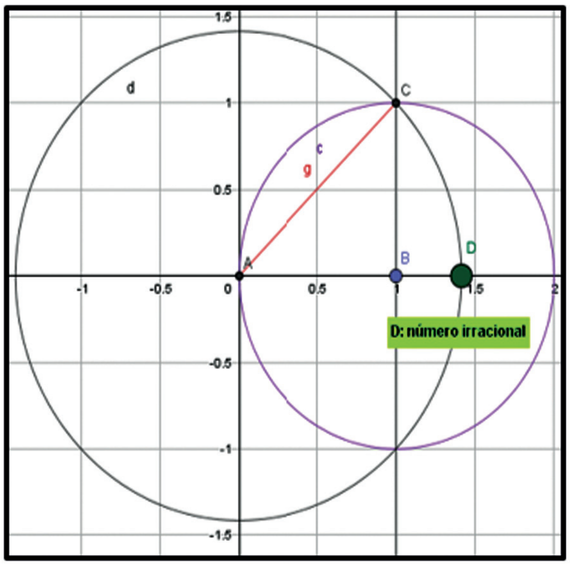
Construcción geométrica y ubicación de los reales en la recta real.



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 5

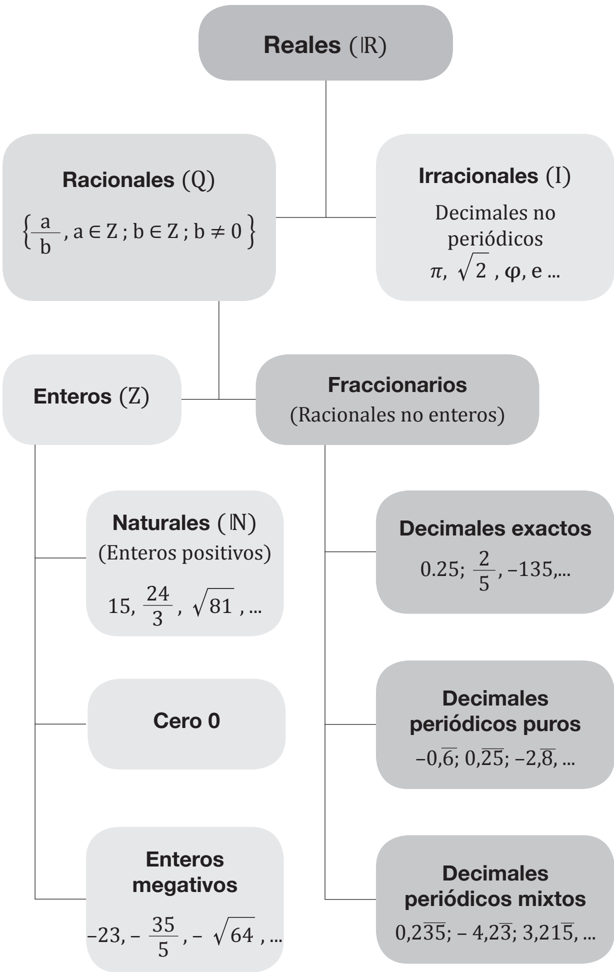
Construcción geométrica de un número irracional $\sqrt{2}$



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 4

Clasificación de los números reales.



De las ilustraciones 3 y 5 se puede determinar que:

$\sqrt{2} = 1,4142...$

$\sqrt{3} = 1,7320...$

$\sqrt{5} = 2,2360...$

$\sqrt{8} = 2,8284...$

representan números irracionales, y su representación geométrica se encuentra en el eje numérico.

El **número irracional** se caracteriza por tener un valor que tiene un número infinito de decimales no periódicos, por ejemplo:

a. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749...$

b. $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 2,4494897427...$

Recuerda que:

Número periódico puro:

a. $0,333... = \frac{3-0}{9}$

$0,333... = \frac{3}{9}$

b. $0,777... = \frac{7-0}{9}$

$0,777... = \frac{7}{9}$

c. $3,2323... = \frac{323-3}{99}$

$3,2323... = \frac{320}{99}$

Número periódico mixto:

d. $5,175454... = \frac{51754-517}{9900}$

$5,175454... = \frac{51237}{9900}$

f. $3,2713838... = \frac{327138-3271}{99000}$

$3,2713838... = \frac{323867}{99000}$

Errores y correcciones frecuentes

Error: $0,33 \rightarrow$ Irracional
Corrección: $0,33 \rightarrow$ Racional

Error: $e \rightarrow$ Racional
Corrección: $e \rightarrow$ Irracional

Error: Todos los números decimales infinitos son números irracionales.
Corrección: Los números decimales infinitos pueden ser números irracionales y racionales.

c. $\sqrt{(3^5)} = 15,588457268119...$

d. π (pi) $= 3,141592653589...$

e. φ (phi) $= 1,618033988749$

f. e (número de Euler) $= 2,718281828459$

Todos los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y por lo tanto no pueden ser expresados como fracciones.

El **número racional,** es el que se puede escribir como número fraccionario tal que su razón tiene un número finito de decimales, por ejemplo:

$$\frac{15}{2} = 7,5$$

Todos los números racionales tienen forma decimal, a esta forma decimal se la llama **decimal periódico;** ejemplo:

$$\frac{1}{4} = 0,250000 = 0,250$$

Ejemplos de la clasificación de los números reales:

1. Dado el conjunto de elementos:

$$\left\{-10,5, \frac{27}{2}, 0.53, \sqrt{7}, -\frac{1}{3}\right\}$$

Clasifica en:

a. Números naturales: 5
b. Números racionales: $-10, 5, \frac{27}{2}, 0.53, -\frac{1}{3}$
c. Números irracionales: $\sqrt{7}$

2. Escribe un visto (√) al conjunto numérico que corresponde:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
121	√	√	√		√
$-\frac{2}{5}$			√		√
$-\frac{1}{3}\pi$				√	√
$\sqrt{2}$				√	√

Ejercicio 1.1: Números reales

1. Completa:

Número	Número opuesto	Número inverso
$-\frac{2}{5}$		
-8		
$-t$		
$\frac{p}{q}$; $(q \neq 0)$		

2. En el siguiente ejemplo, escribe en orden el número entero anterior y el que le sigue.

   a. 4 b. -4 c. $6{,}5$ d. $-3\frac{1}{4}$

3. Escribe <,>,= según corresponda:

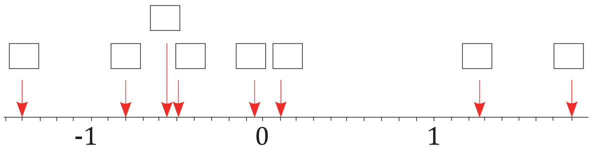
   a. $2\frac{1}{2} \;\square\; 2\frac{2}{3}$ b. $-2\frac{2}{3} \;\square\; -2\frac{4}{5}$

   c. $4{,}5 \;\square\; 4{,}05$ d. $3\frac{1}{4} \;\square\; \frac{13}{4}$

4. ¿Determina qué número se encuentra en la mitad de:

   a. $3{,}5$ y 7 b. $-\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$

5. Escribe el número que representa cada flecha.



6. Ubica los siguientes números en la recta real. Puedes utilizar el programa Geogebra o un visualizador gráfico.

$$\left\{-\frac{\pi}{3},\ \sqrt{(-25)^2},\ \frac{20}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{8}},\ e^{-2}\right\}$$

7. Clasifica en números naturales, enteros, racionales e irracionales los elementos de los siguientes conjuntos:

   a. $\left\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.58, 0.111, \frac{124}{99}\right\}$

   b. $\left\{-\frac{\pi}{3},\ \sqrt{(-25)^2},\ \frac{20}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{8}},\ e^{-2},\ \frac{56}{45},\ 3^{-5}\right\}$

8. Pon un visto (√) al conjunto numérico que corresponda cada connotación.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{3}{4}$					
$\sqrt{169}$					
$\frac{2}{3}\pi$					
0,65					
0					

9. Determina la forma decimal de los siguientes números racionales.

   a. $\frac{5}{9}$ b. $\frac{14}{5}$ c. $-\frac{3}{8}$

10. Determina la fracción simplificada de los siguientes números decimales.

    a. $0{,}25$ b. $1{,}\overline{3}$ c. $-0{,}65$

    b. $2{,}6\overline{5}$ e. $1{,}3$ f. $1{,}2\overline{4}$

11. ¿En qué casos es un número racional mayor que su opuesto, y en qué casos es menor que su opuesto?

12. Escribe en palabras lo que representa cada literal.

    a. $a > 0$

    b. $a < -3$

    c. $-8 \leq a < 3$

    d. Un día determinado, las temperaturas de Quito han sido mayores a 12° C y menores a 18° C. Escribe las temperaturas que se han registrado en este día en forma de intervalo.

Recuerda que:

Para cada número real existe un inverso aditivo, de tal manera que la suma del número con su inverso aditivo es cero.

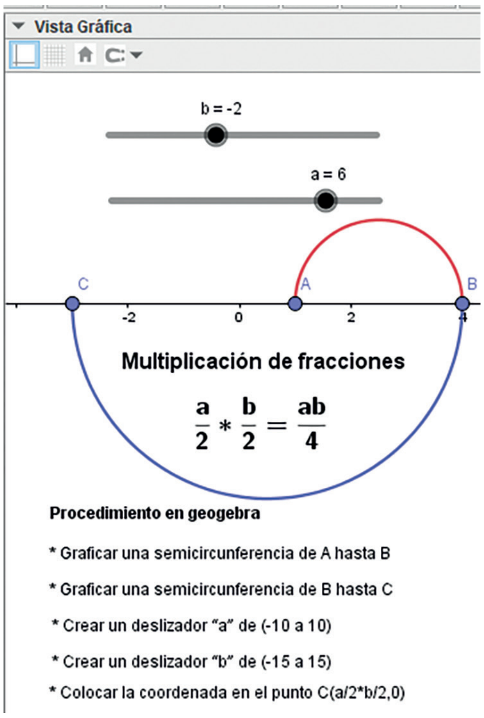
$$a + (-a) = 0$$

Para cada número real distinto de cero existe un inverso multiplicativo, de tal manera que la multiplicación del número con su inverso multiplicativo es uno.

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

Stewart, 2009

Ilustración 6
Construcción gráfica de multiplicación de fracciones.



Fuente: Geogebra 2017

1.1.1. Propiedades de los números reales

Propiedades de números reales:

1. $a + b = b + a$
2. $ab = ba$
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. $a(bc) = (ab)c$
5. $a(b + c) = ab + ac$

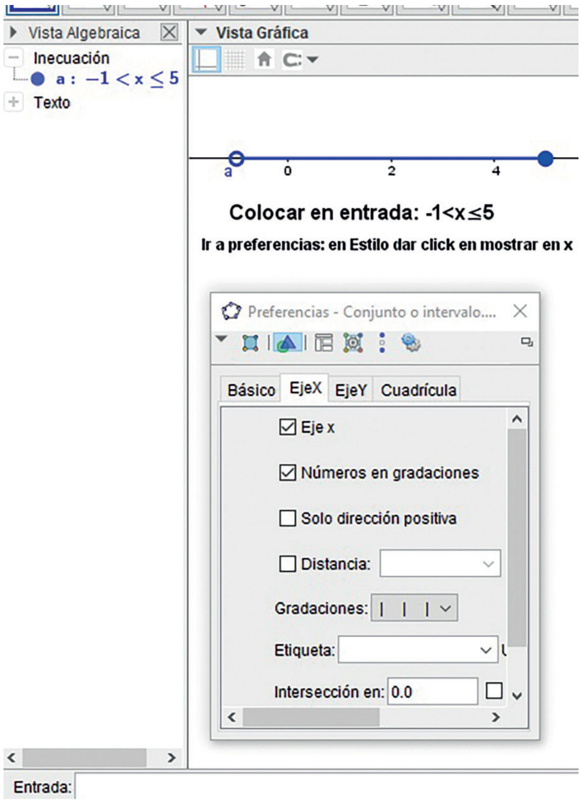
Propiedades de fracciones (con b y d ≠ 0):

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cd}{bd}$
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
6. $\frac{a}{0}$ = no existe

Leyes de signos:

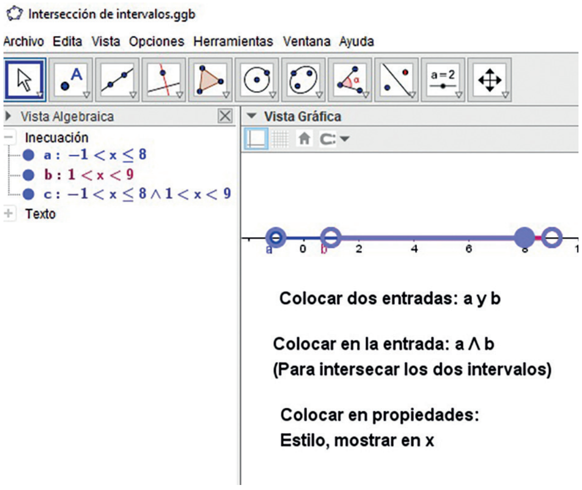
1. $-1(c) = -c$
2. $-1(c + d) = -c - d$
3. $-1(-c) = c$

Ilustración 8
Construcción de un intervalo.



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 9
Intersección de dos intervalos

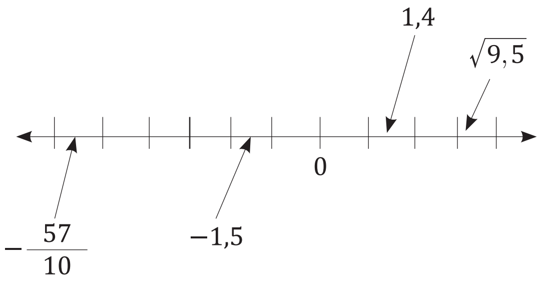


Fuente: Geogebra 2017

1.1.2 Conjuntos e intervalos

Se utiliza la recta numérica para determinar conjuntos e intervalos:

Ilustración 7
Representación de valores en la recta numérica:



En la siguiente tabla se ilustran los tipos de intervalos.

Gráfica	Notación de intervalo	Desigualdad
A B f	[A,B]	$A \leq f \leq B$
A B_1 f_1	$(A,B_1]$	$A < f_1 \leq B_1$
A_3 B f_2	$[A_3,B)$	$A_3 \leq f_2 < B$
A B f	(A,B)	$A < f < B$

Tabla 1: Tipos de intervalos

En el primer segmento se muestra un intervalo cerrado en el que se incluyen los dos extremos. En el segundo segmento existe un intervalo semiabierto en el que se incluye el segundo extremo y el primero no. En el tercer segmento se tiene un intervalo semicerrado en el que se incluye el primer extremo y el segundo no, en el último segmento se tiene un intervalo abierto en el que se excluyen los dos extremos.

Dato Curioso

No existe número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto.

Todo intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real.

En el intervalo cerrado [a,b], el número mínimo es a y el máximo es b, pero el intervalo abierto (0, 1) no contiene número mínimo o máximo.

Para ver esto, observa que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente.

Siempre podemos hallar un número en el intervalo (0, 1) más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo.

Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente.

Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo

(Stewart, 2009).

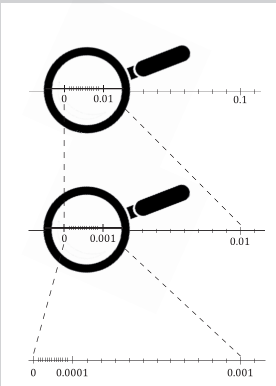
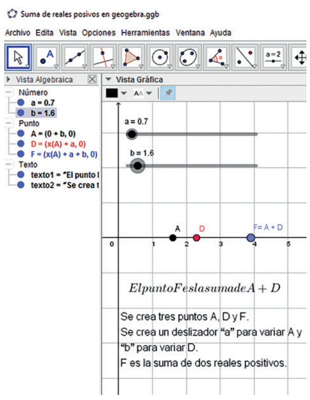


Ilustración 10
Suma de números reales con el uso de valores dinámicos.



Fuente: Geogebra 2017

Ejemplos de propiedades de los reales, conjuntos e intervalos:

1. Aplica las propiedades de la ley de signos.

$$-5(-10+15)$$
$$=(-5)(-10)+(-5)(15)$$
$$=50+(-75)$$
$$=-25$$

2. Expresa los intervalos en forma de inecuación o viceversa.

Intervalo	Inecuación
$(1,5)$	$1<x<5$
$(1,5]$	$1<x\leq 5$
$(-3,\infty)$	$-3<x$
$\left[\frac{1}{2},\infty\right)$	$\frac{1}{2}\leq x$

3. Aplica las propiedades de los números reales.

a. $\frac{2}{0}=\text{no existe}$

b. $\frac{4}{7}+\frac{c}{7}=\frac{4+c}{7}$

c. $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8+15}{12}=\frac{23}{12}$

d. $\frac{0}{6}=0$

4. Calcula el resultado de los siguientes ejercicios:

$$\frac{1}{3}-2\left\{\frac{1}{3}+3\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}+1\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-2\left\{\frac{1}{3}+3\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-2\left\{\frac{1}{3}+3\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-2\left\{\frac{1}{3}+3\left[\frac{7}{6}\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-2\left\{\frac{1}{3}+\frac{7}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}-2\left\{\frac{23}{6}\right\}$$
$$=-\frac{22}{3}$$

Ejercicios 1.1.1 y 1.1.2: Números reales

1. Calcula el resultado de los siguientes ejercicios

a. $\frac{1}{3} - 2\left\{\frac{1}{3} + 3\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3} + 1\right)\right]\right\}$

b. $12 - 6\left[\frac{1}{3} + \frac{5}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right) - 2\right]$

c. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}$

d. $\left(\frac{1}{1-1} - \frac{2-2}{4}\right) + \left(-3 + \frac{3}{2}\right)$

e. $\left(\frac{5}{6} - \frac{2-1}{0}\right)\left(-3 + \frac{3}{2}\right)$

f. $4 + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} \text{ x } 5\right) + \left(\frac{5}{8} \text{ x } \frac{2}{15}\right) - \frac{3}{2}$

g. $\left\{3\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} \text{ x } 5\right)\right] + \left(\frac{5}{8} \div \frac{2}{15}\right)\right\} - \frac{3}{2}$

h. $\frac{3}{4}\left\{\left[-\frac{1}{2} \text{ x } 5\right) + \left(\frac{5}{8} \text{ x } \frac{2}{15}\right)\right] - \frac{3}{2}\right\}$

i. $\dfrac{\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}\left(\frac{2}{16}\right)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}$

j. $\dfrac{8 + 0{,}5}{4 + 0{,}25} - \dfrac{1 + 0{,}\overline{6}}{\dfrac{1}{1 + \frac{2}{5}}}$

k. $\dfrac{4 + 0{,}1(5)}{2 + 0{,}25} + 4\left(\dfrac{1 + 0{,}\overline{6}}{\dfrac{1}{1 + \frac{2}{5}}}\right)$

2. En la primera columna se muestra la expresión en forma de intervalos. Representa en forma de inecuación y gráfica.

Intervalo	Inecuación	Gráfica
$(-1{,}5)$		
$(-11{,}5]$		
$(1{,}\infty)$		
$(-\infty{,}10)$		
$(1{,}\infty)$		
$\left(\frac{2}{5}, 10\right)$		
$[-5{,}-1]$		
$\left[0, \frac{3}{2}\right)$		
$\left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$		

3. Como jefe de nómina de una empresa de publicidad, se deben calcular las horas trabajadas por un grupo de empleados. Si trabajaron 3 meses y 13 días. ¿Cuántas horas trabajaron? Considera que un día tiene 8 horas laborables y un mes tiene 20 días laborables.

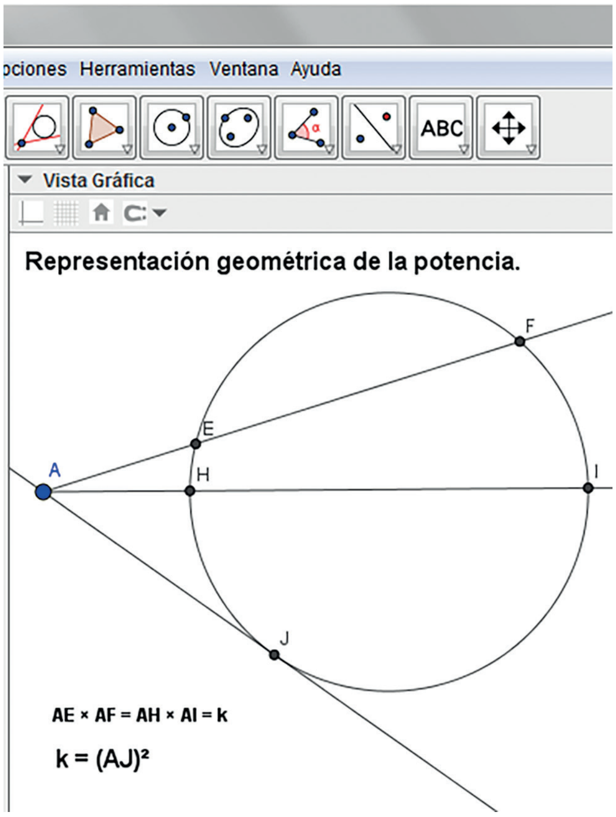
4. Para una campaña publicitaria submarina se contrata a un buzo para tomar fotos de unas ruinas a diferentes profundidades y con la siguiente secuencia: Primero baja a 150 m de profundidad; luego sube a 75 m de profundidad; posteriormente baja 20 m, y finalmente sube 40 m. Indica a qué profundidad se encuentra al final de la secuencia.

5. En la biblioteca de un colegio 1/3 de los libros son sobre Matemática, la quinta parte corresponde a Mercadotécnia y 1/9 parte de los libros corresponde a Comunicación. ¿Qué fracción del total de libros en la biblioteca corresponde a estas tres categorías?

6. En el siguiente ejemplo (7+0)(6-40), ¿qué se puede decir del cero?

7. Tres jóvenes jugaron un videojuego tratando de obtener todo el tesoro. El primero obtuvo 1/3 del tesoro, el segundo 4/9, y el tercero 4/18. ¿Qué cantidad del tesoro obtuvieron los tres jugadores y cuál fue el participante que ganó la mayor parte?

Ilustración 11
Representación geométrica de la potencia.



Fuente: Geogebra 2017

1.2 Exponentes y radicales

Las expresiones con exponentes y radicales son aquellas en las cuales se tiene un exponente racional de la forma $a^{\frac{m}{n}}$; donde n puede ser 1 o diferente de 1, sin incluir el 0, las propiedades de exponentes son las mismas que las propiedades de los radicales.

(Stewart, 2009)

Exponentes enteros

Si **x** es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces:

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x.....x \text{ (n factores)}$$

Donde **x** se denomina base y n es exponente.

Las propiedades de los exponentes son:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
3. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
4. $(x \cdot y)^n = x^n y^n$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$
7. $\left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1$

Para entender de forma más sencilla el comportamiento de un exponente numérico fraccionario, se debe observar las siguientes propiedades:

Errores y correcciones frecuentes

Error: $x^m \cdot x^n = x^{m \cdot n}$
Corrección: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Error: $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m/n}$

Corrección: $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Error: $\dfrac{x^0}{y^0} = \dfrac{x}{y}$

Corrección: $\dfrac{x^0}{y^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

Error: $\dfrac{x}{0} = 0$

Corrección: $\dfrac{x}{0} = \text{no existe}$

Errores y correcciones frecuentes

Error: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Corrección: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}$

Error: $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Corrección: $\sqrt{a-b} = \sqrt{a-b}$

Error: $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$

Corrección: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

Error: $\sqrt{a^2-b^2} = a - b$

Corrección: $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{a^2-b^2}$

Error: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{n}{m}}$

Corrección: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$;

si "n" es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Exponente racional: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

si "n" es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Las propiedades de las raíces son:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
4. $(\sqrt[n]{a})^n = a$; si $a \geq 0$
5. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; si n es par

Ejemplos de operaciones con exponentes y radicales

a. $(-6)^{-2} = \left(\dfrac{1}{(-6)^2}\right) = \dfrac{1}{36}$

b. $\dfrac{9^2}{9^7} = 9^{2-7} = 9^{-5} = \dfrac{1}{9^5}$

c. $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-5} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{5} = \dfrac{243}{16807}$

d. $2^0 \,.\, 2^5 = 2^{0+5} = 2^5$

e. $x^{-1} \,.\, x^5 = x^{-1+5} = x^4$

f. $\left(\dfrac{0}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{0} = \text{no existe}$

g. $-3^2 = -(3)(3) = -9$

h. $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{8}{3}}$

i. $\dfrac{a^{\frac{2}{5}} a^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{2}{5}+\frac{7}{5}-\frac{3}{5}} = a^{\frac{6}{5}}$

j. $2\sqrt{x}\left(3\sqrt[3]{x}\right) = \left[2(x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[3(x)^{\frac{1}{3}}\right] = 6\left(x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right) = 6x^{\frac{5}{6}}$

k. $\sqrt{x\sqrt{x}} = \left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

Ejercicios 1.2: Radicales y exponentes

1. Calcula el resultado de:

a. $(-5)^{-2}$

b. $a^{\frac{1}{2}}\, a^{\frac{7}{3}}$

c. $\dfrac{b^{\frac{2}{5}}\, b^{\frac{7}{3}}}{b^{\frac{3}{5}}}$

d. $z^{\frac{1}{2}}\, z^{-2}\, z^{5}$

2. a. Calcula y simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{4+0,5}{2+0,25} - \frac{1+0,\overline{6}}{(1+0,4)^{-1}} \div (1-0,5)^{-2}$$

b. Determina a qué conjunto de números pertenece el resultado del literal a.

c. Ubica en el plano "x", el resultado del literal a, utiliza un visualizador gráfico.

3. Calcula y simplifica la siguiente expresión:

$$0,25\left(\frac{1}{0,1^{-1}} + 0,01 - 2,5 + \frac{1}{2}\right)$$

4. En la siguiente expresión, determina qué valor no puede tomar la expresión resultante para que se mantenga en los reales.

$$\frac{a^{\frac{2}{5}}\, a^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}}$$

5. Simplifica las siguientes expresiones utilizando propiedades de exponentes.

a. $\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{6}}\,(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

b. $\dfrac{2^{x+3} + 2^{x+1} - 2^{x}}{2^{x+1} + 2^{x}}$

6. Analiza el resultado de la expresión:

$$\frac{(-5u^3)^3}{(-5u^{-1})^{-1}}$$

Si **u** toma los siguientes valores:

a. $u = 0$ b. $u = 1$

7. Utiliza las propiedades de exponentes y resuelve las siguientes operaciones.

Nota: a,b,c,d,z son constantes,

$a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 0$ y $z = 3$.

a. $(3a)^{-2}$ b. $(2^7\, z^2)^0$

c. $\dfrac{0^3 b}{c}$ d. $\left(\dfrac{5d}{5^2}\right)^{-1}$

e. $[-(3z)]^5$ f. -3^{-5}

8. Escribe en forma exponencial los siguientes ejemplos:

a. $\sqrt{10}$ b. $\sqrt{p^5}$ c. $\sqrt{5x^2y^3}$

9. Calcula y simplifica los siguientes ejercicios.

a. $-\sqrt{64}$ b. $\sqrt{\dfrac{225}{16}}$ c. $-\sqrt{\dfrac{4}{9}}$

d. $-\sqrt{\dfrac{0,16}{0,25}}$ e. $\sqrt{\dfrac{150\,a^2 b}{c^2}}$ f. $\sqrt{\dfrac{125b}{z^2}}$

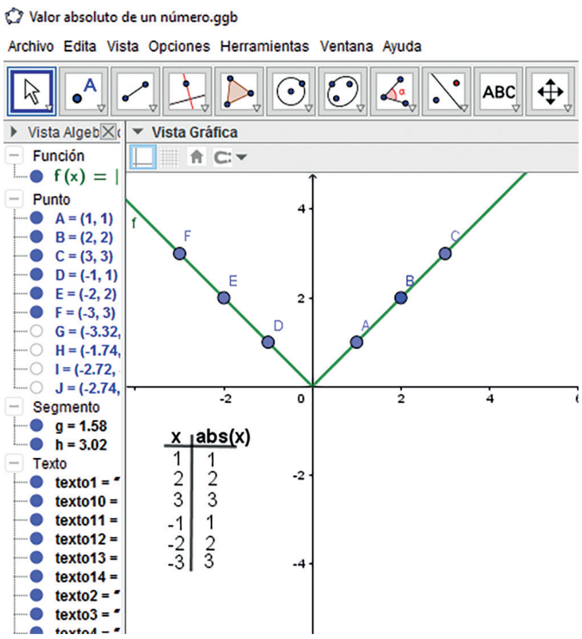
g. $\sqrt{\dfrac{150x^6x^6}{y^{12}}}$ h. $\sqrt{25x^2y^3z^5}$

i. $\sqrt{\dfrac{\frac{81}{16} \div \frac{81}{16} \times \frac{25}{4}}{(0,4) \div \frac{5}{2}}} \times \sqrt{\dfrac{100}{4}}$

j. $3\sqrt{192} - 10\sqrt{108} - 8\sqrt{48}$

k. $4\sqrt{a} - 5\sqrt{8} - 10\sqrt{48};\ a = 2$

Ilustración 12
Representación geométrica del valor absoluto en geogebra.



Fuente: Geogebra 2017

Errores y correcciones frecuentes

Errores: $|x + a| = |x|+|a|$

Corrección: $|x + a| = |x + a|$

Errores: $| - x - b| = x + b$

Corrección: $| - x - b| = | - x - b|$

1.3: Valor absoluto

El valor absoluto de un número es un número positivo o cero, es decir no es negativo. En términos geométricos el valor absoluto de un número **|b|** es su distancia desde cero sin importar el sentido de la misma.

(Lous Leithold, 1982)

Por definición de valor absoluto, si b es un número real, entonces:

$$|b| = \begin{cases} b & si\ b \geq 0 \\ -b & si\ b < 0 \end{cases}$$

Propiedades de valor absoluto

Propiedades	Ejemplo
1. $\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -2\rvert = 2 \geq 0$
2. $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 6\rvert = \lvert -6\rvert$
3. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\,\lvert b\rvert$	$\lvert -3 \cdot 4\rvert = \lvert -3\rvert\ \lvert 4\rvert$
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{15}{-5} \right\rvert = \frac{\lvert 15\rvert}{\lvert -5\rvert}$

Ejemplos de valor absoluto

a. $|3| = 3$

b. $|-5| = -(-5) = 5$

c. $|6 - 8| = -(-2) = 2$

d. $|1 - 5| = -(-4) = 4$

e. $|2 - (-8)| = 10$

f. $\left| -\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| = 1$

Ejercicios 1.3 “Valor absoluto”

1. Evalúa cada una de las expresiones:

a. $||-6| - |-4||$

b. $|2 - |-12||$

c. $|(-2)\ 6|$

d. $\frac{-1}{|-1|}$

e. $-1 - |1 - |-1||$

Errores y correcciones frecuentes

En este tema es importante tener claro el siguiente concepto:

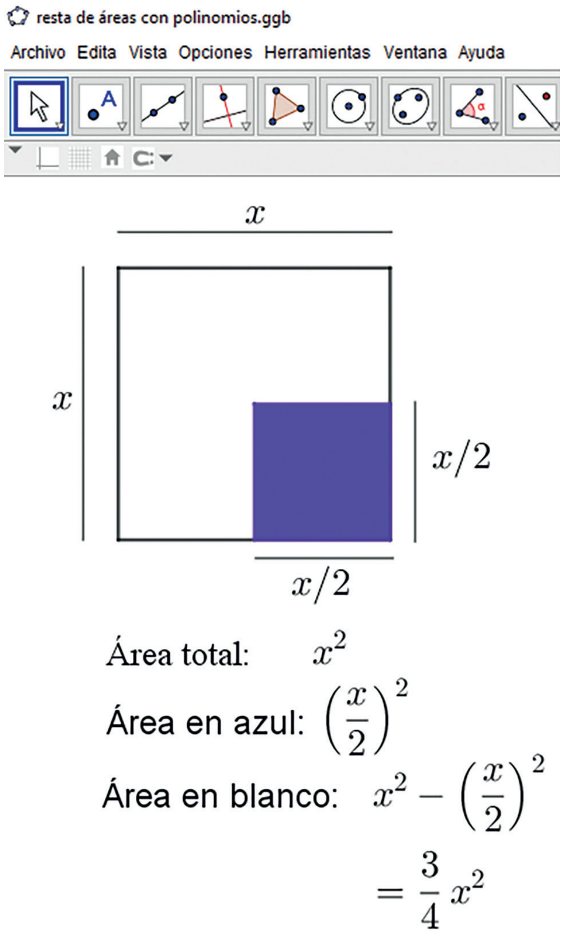
Término semejante es toda expresión algebraica en la cual todas las variables y exponentes de estas son iguales, los coeficientes de estas variables pueden ser diferentes.

Error: $x^2 + x + 2x^2 = 4x^5$
Corrección: $x^2 + x + 2x^2 = 3x^2 + x$

Error: $-x + x = 1$
Corrección: $-x + x = 0$

Error: $a - b\sqrt{x} = (a - b)\sqrt{x}$
Corrección: $a - b\sqrt{x} = a - b\sqrt{x}$

Ilustración 13
Resta de polinomios mediante áreas en geogebra



Fuente: Geogebra 2017

1.4 Expresiones algebraicas

En las expresiones algebraicas se tiene una variable para representar un número o un conjunto de números, las variables que se utilizan son generalmente "x,y,z", debido que son las letras que menos se utilizan en el idioma francés. Estos números son elementos de los reales y se los utiliza en combinación de suma, resta, multiplicación, división, potencias, exponentes para obtener una expresión algebraica.

(Stewart, 2009)

Ejemplos de expresiones algebraicas

$$x^2 + x - 2 \qquad 3 - \sqrt{x} \qquad \frac{y+2}{y-4}$$

Polinomios

Un polinomio en la variable "x" es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0;$$

Donde a_n es una constante que pertenece a los números reales y n es un número entero no negativo.

En la siguiente tabla se muestra la variedad de polinomios:

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 + x - 3$	Trinomio	$2x^2, x, 3$	2
$x^8 + 2x$	Binomio	$x^8, 2x$	8
x^3	Monomio	x^3	3
$\frac{2}{5}x^7 + 3x^2 - 3x - 5$	Cuatro términos	$\frac{2}{5}x^7, 3x^2, 3x$	7

Tabla 2. Variedad de polinomios

Combinación de expresiones algebraicas

Para combinar expresiones algebraicas se aplica propiedades de los reales, se tiene que combinar términos semejantes, Por ejemplo:

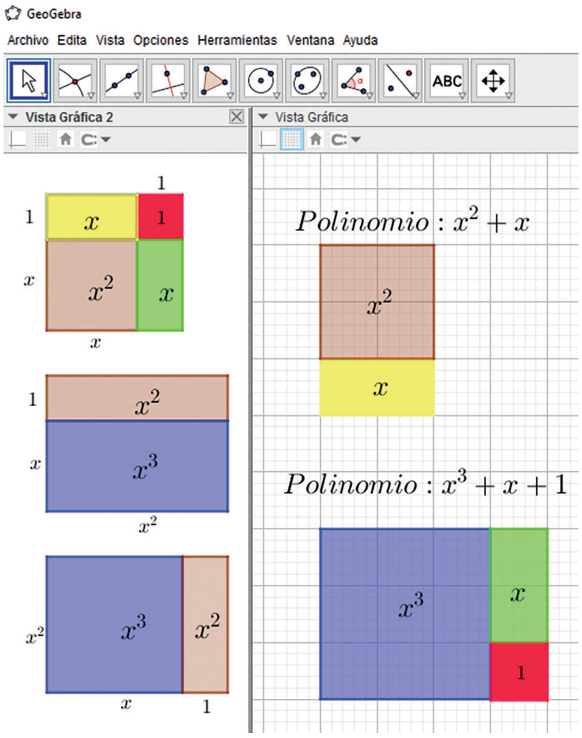
$$4x^7 + 3x^7 - 3x - 2x = 7x^7 - 5x$$

Para realizar estas combinaciones se debe tener en cuenta la ley de signos:

$$-(4x + 5x) = -4x - 5x = -9x$$

Ilustración 14

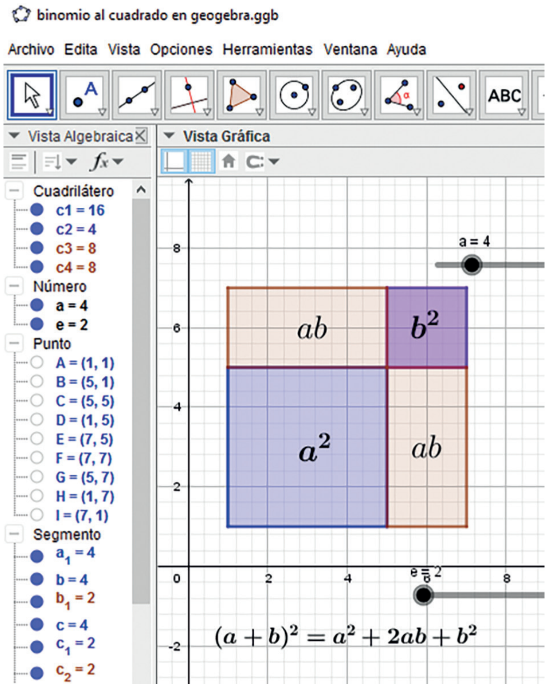
Suma de polinomios mediante cajas en geogebra.



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 15

Construcción de un binomio al cuadrado con deslizadores.



Fuente: Geogebra 2017

Ejemplo de adición y sustracción de polinomios:

a. $(x^3 - 6x^2 + 3x) + (4x^3 + 7x^2 + 5x) = (x^3 + 4x^3) + (-6x^2 + 7x^2) + (3x + 5x) = 7x^3 + x^2 + 8x$

b. $(x^3 - 6x^2 + 3x) - (4x^3 + 7x^2 + 5x)$
$= (x^3 - 4x^3) + (-6x^2 - 7x^2) + (3x - 5x)$
$= -3x^3 - 13x^2 - 2x$

Fórmulas para productos especiales

Productos notables

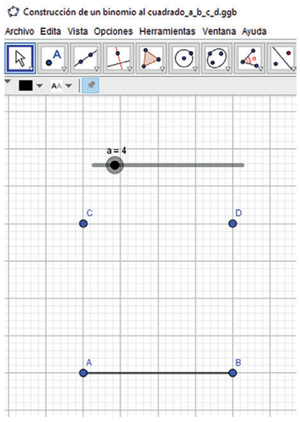
Si A y B son números reales o expresiones algebraicas, entonces:

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$
7. $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

Ejemplo de multiplicación de expresiones algebraicas:

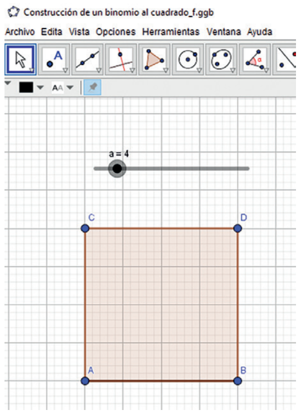
1. $(xy)(2x + y^2) = 2x^2y + xy^3$
2. $(x - 3)^3 = x^3 - 3x^2(3) + 3x(3)^2 + 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x + 27$
3. $(2\sqrt{x} + y)(2\sqrt{x} - y) = (2\sqrt{x})^2 - y^2 = 4x - y^2$
4. $\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{y}\right) + \left(\sqrt{y}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{y} + y$
5. $\left(\frac{2}{3}x + y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + y^2\right) = \frac{8}{27}x^3 + y^3$

Ilustración 16
Construcción de un binomio al cuadrado, ejemplo 6, literales: a, b, c, d.



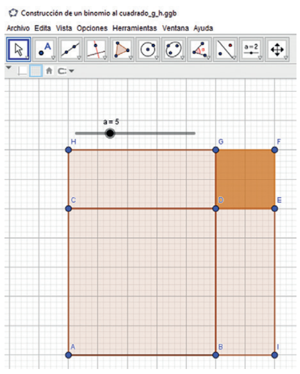
Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 17
Construcción de un binomio al cuadrado, ejemplo 6, literal:



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 18
Construcción de un binomio al cuadrado, ejemplo 6, literal: g, h.



Fuente: Geogebra 2017

6. Realiza la construcción de un binomio al cuadrado en Geogebra, sigue el siguiente proceso:

   a. En el siguiente enlace accede al programa: https://Geogebra.softonic.com/descargar

   b. En vista gráfica y algebraica, a través de la barra de herramientas, coloca los siguientes puntos:

$$A(1, y_1) \text{ y } B\,(1, y_2)$$

   c. Crea un deslizador **"a"**, da un valor mínimo de 3 y máximo de 10 con incremento de 1.

   d. Renombra el punto $B(x(A)+a,y(A))$, para que el punto B se mueva, observa la ilustración $\mathbf{20.}$

   e. Coloca un punto $C(x(A),y(A))+a$; seguido de un punto $D(x(B),y(C))$.

   f. Une los puntos en dirección contraria a las manecillas del reloj mediante la opción polígono, observa la ilustración 17.

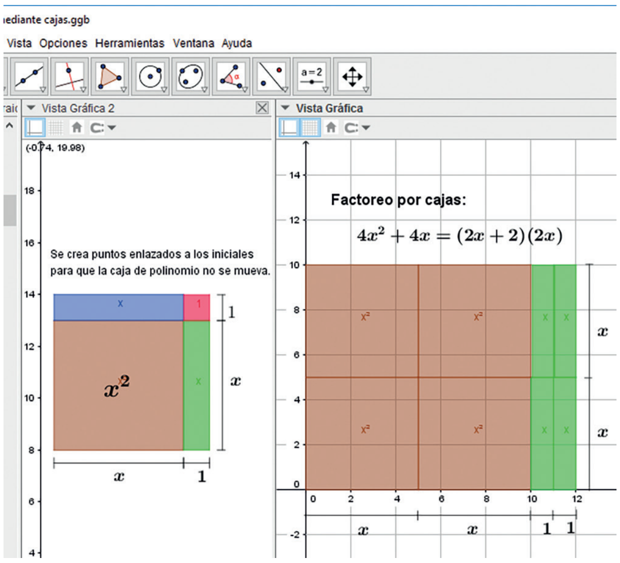
   g. Ubica cinco puntos más E,F,G, junto con un deslizador **"e"**, con un valor mínimo de 2 y máximo de 10 con incremento de 1.

   h. Crea los siguientes puntos:

$$E = (x\,(C) + e, y(C))$$
$$F = (x\,(E), y(E) + e)$$
$$G = (x\,(D), y(F))$$
$$H = (x\,(A), y(G))$$
$$I = (x\,(E), y(A))$$

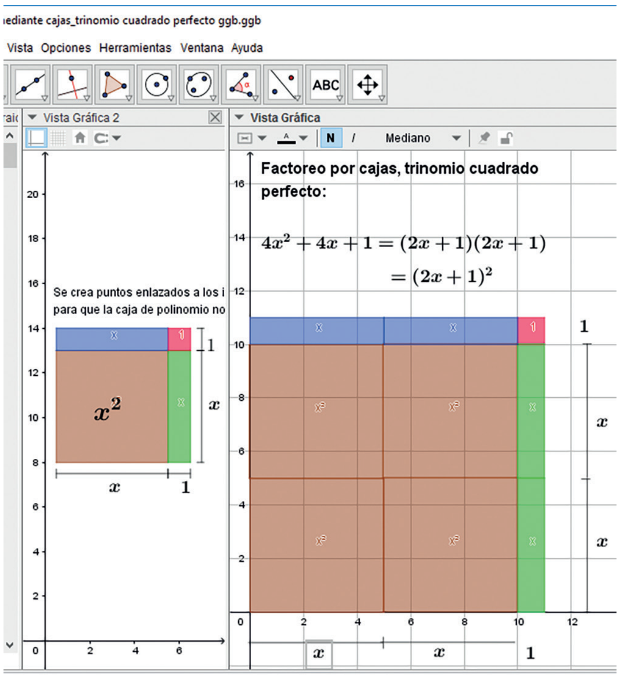
Si se varía los deslizadores, se observa la ilustración 18.

Ilustración 19
Gráfica de factoreo por cajas.



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 20
Gráfica de un trinomio cuadrado perfecto.



Fuente: Geogebra 2017

Factorización

Factorizar una expresión algebraica significa dejar a la expresión en producto de términos más simples.

(Stewart, 2009)

Factorización →

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$$

De la expresión anterior, se concluye que $(x + y)(x - y)$ son factores de $(x^2 - y^2)$

El caso más sencillo de factorización se da cuando los términos tienen un factor común, por ejemplo:

$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1)$
Donde "2" es el elemento común

$2x^3y + xy^3 = x\,y(2x^2 + y^2)$
Donde "xy" es el elemento común

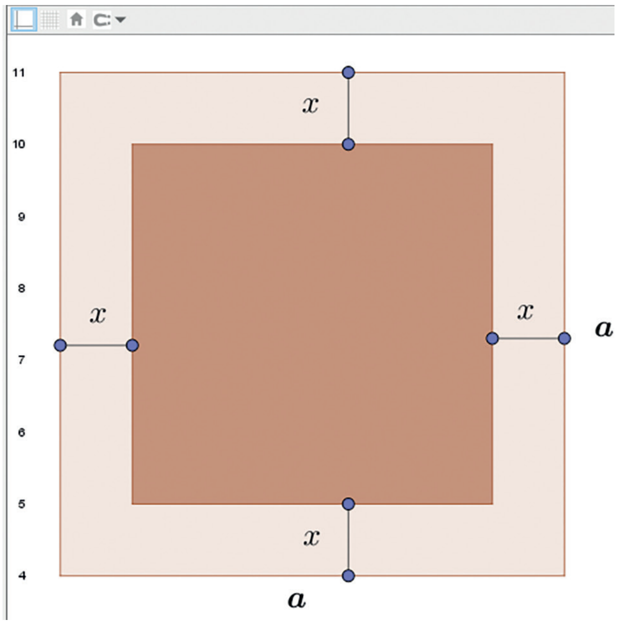
$8x^4 y^2 + 6x^3 y^3 - 2xy^4 = 2xy^2 (4x^3 + 3x^2 y - y^2)$
Donde "$2xy^2$" es el elemento común

Fórmulas de factorización especial

Si A y B son números reales o expresiones algebraicas, entonces;

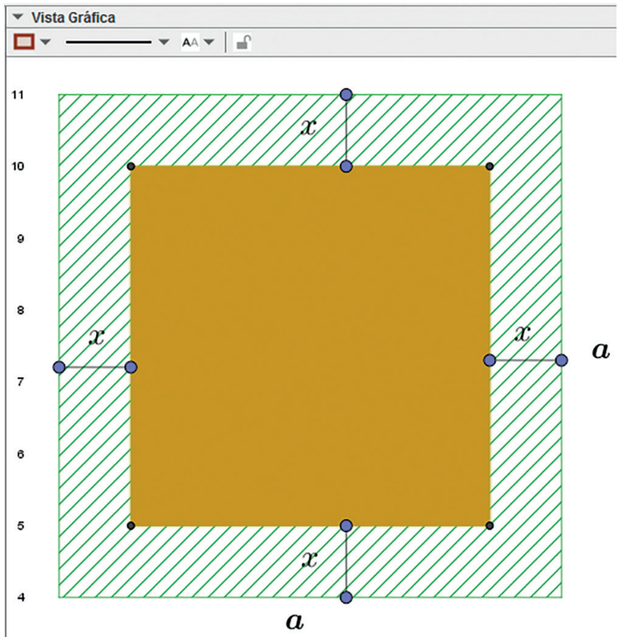
1. $A^2 B - AB^2 = AB(A - B)$
   Factor común
2. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
   Diferencia de cuadrados
3. $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$
   Trinomio cuadrado perfecto
4. $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$
   Trinomio cuadrado perfecto
5. $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$
   Factor común por agrupación y trinomio cuadrado perfecto

Ilustración 21
Gráfica de un ejercicio de factoreo



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 22
Área subrayada a factorar



Fuente: Geogebra 2017

6. $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$
   Factor común por agrupación y trinomio cuadrado perfecto

7. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
   Suma de cubos

8. $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
   Diferencia de cubos

Ejemplos de factorización de polinomios

1. Factorización de diferencia de cuadrados

   $(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$

2. Diferencia de cubos

   $27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

3. Factor común por agrupación

   $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4) =$
   $x^2(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 4)$

4. Factoreo aplicado en lugares geométricos

a. Cada semana se corta el césped de las orillas de un terreno de forma cuadrada ubicado en un centro comercial. El resto del terreno permanece intacto como área verde. El terreno mide **a** metros por **a** metros y la franja podada es **x** metros de ancho. El gráfico se muestra en la ilustración 22.

b. Explica por qué el área de césped cortada responde a:

   $a^2 - (a - 2x)^2$

c. Factoriza la expresión del inciso anterior

   Resolución: El área resultante se debe a la resta de polinomios referente al área mayor, que es área total del terreno menos el área menor que es el área del césped sin cortar.

   Af = Área a factorar
   $Af = a^2 - (a - 2x)^2$
   $Af = [a - (a - 2x)][a + (a + 2x)]$
   $Af = 4x(a - x)$

Ejercicios 1.4 Expresiones algebraicas

1. Realiza las operaciones y simplifica:

a. $4(x^2-3x+5)-(x^2-2x+1)$

b. $2(2-5t)+t^2(t-1)-(t^4-1)$

c. $5(3z-4)-(z^2+2)-2(z-3)$

d. $(3t-2)(7t-5)$

e. $\sqrt{z}\,(z-\sqrt{z}\,)$

f. $x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

g. $(4z-3t)(2z+5t)$

h. $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

i. $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right.\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$

j. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}\right)\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

k. $(\sqrt{h^2+1}\,+1)\,(-1+\sqrt{h^2+1}\,)$

l. $(1+a^3)^2$

m. $(1-2y)^2$

n. $(2x^2-3y^2)^2$

o. $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}\right)^2$

p. $\left(ab-\dfrac{1}{ab}\right)^2$

q. $\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{3}{2}}\right)^2$

r. $(x^2+x-1)(2x^2-x+2)$

s. $(x^4y-y^5)(x^2+xy+y^2)$

t. $(a+b+c)(a-b-c)$

u. $(1+a^3)^3$

v. $(1-b)^2\,(1+b)^2$

w. $\left(t^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{1}{2}}\right)\left(t^{\frac{1}{2}}+s^{\frac{3}{2}}\right)$

x. $(a-2b)^3$

y. $(xy+y^2)^3$

2. Resuelve:

a. La suma de los siguientes polinomios y encierra con un círculo el coeficiente líder del polinomio resultante.

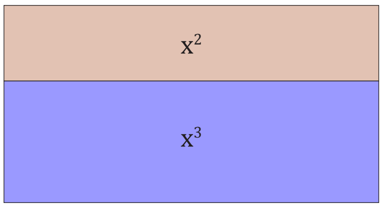
$$\left(-\frac{1}{5}w^2-\frac{2}{5}w-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}w^2+\frac{4}{5}w^3+w-9\right)$$

b. Si "w" es una constante igual a cero ¿cuál es el valor resultante?

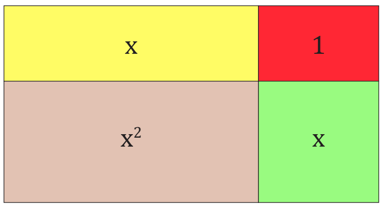
c. Rediseña un polinomio que sea equivalente en resultado al polinomio del literal **a**.

3. Genera el polinomio de cada gráfica:

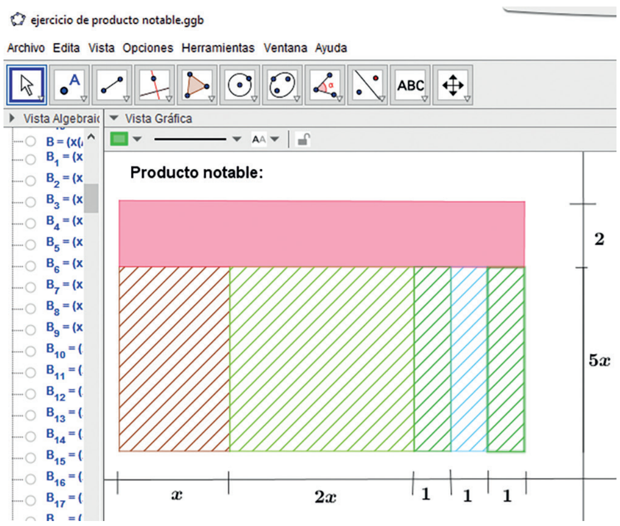
a.



b.



4. En Geogebra, construye el lugar geométrico de la siguiente ilustración, y escribe el área sombreada en producto notable.



Fuente: Geogebra 2017

5. Factoriza la siguiente fórmula que corresponde al volumen del cascaron cilíndrico de una alcantarilla:

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

6. Aplica la fórmula de las diferencias de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Observa que es fácil calcular mentalmente la fórmula factorizada, pero es difícil de calcular la fórmula original. Evalúa mentalmente cada siguiente expresión:

   a. $528^2 - 527^2$

   b. $122^2 - 120^2$

   c. $1020^2 - 1010^2$

7. Aplica la fórmula de productos notables.

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

   para calcular los productos:

   a. 79×51

   b. 998×1002

8. Factora totalmente las siguientes expresiones:

   a. $-2y + 16y$

   b. $y(y - 6) + 9(y - 6)$

   c. $(a + 2)^2 - 5(a + 2)$

   d. $8w^2 - 14w - 15$

   e. $(3t + 2)^2 + 5(3t + 2) + 12$

   f. $6s^2 + 11y - 21$

   g. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

   h. $9w^2 - 16$

   i. $(x + 3)^2 - 4$

9. Factoriza totalmente las siguientes expresiones:

   a. $8s^3 - 125t^6$

   b. $a^3 + 4a^2 + a + 4$

   c. $3a^3 - a^2 + 6a - 2$

   d. $-9a^3 - 3a^2 + 3a + 1$

   e. $y^5 + y^4 + y + 1$

   f. $9x^2 - 36x - 45$

   g. $(p + q)^2 - (p - q)^2$

   h. $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2$

   i. $(b^2 - 1)\, b^2 - 4(b^2 - 1)$

   j. $t^6 - 8s^3$

   k. $t^6 + 64$

   l. $(b^2 + 1)^2 - 7(b^2 + 1) + 10$

   m. $(b^2 + 2b)^2 - 2(b^2 + 2b) - 3$

10. Verifica si hay errores y justifica.

Expresiones algebraicas	**Justifica en el caso de existir error y corrige**
$3x(x - 2) = 3x - 2$	
$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$	
$(A^2 + b^2) = (A + b)^2$	
$\left(\frac{1}{2} + c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2$	
$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$	
$(s + w)^2 - z^2 = s^2 + w^2 - z^2$	
$\left(\sqrt{r} - \frac{1}{s}\right)\left(\sqrt{r} + \frac{1}{s}\right) = r + \frac{1}{s^2}$	

11. Construye una caja de polinomios que corresponda a la siguiente expresión algebraica.

$$(3x + 5)(2x - 1)$$

Ejercicios de repaso

1. Determina el factor común por agrupación:

   a. $x^2 + 3x + 4x + 12$

   b. $24x^2 - 20xy + 30xy - 25y^2$

   c. $xy + 7x - 3y - 21$

   d. $xy - 10 + 2y - 5x$

   e. $5xy + 10x + 6y + 12$

   f. $xy + y + 4x + 4$

   g. $5x + 45 + xy + 9y$

   h. $5x - 50 + xy - 10y$

   i. $8a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 9b^3$

   j. $xy - 5yz + 10x - 50z$

   k. $24cx - 12cy - 16gx + 8gy$

2. Para factorizar los trinomios, primero determina el factor común, en caso de no ser posible el polinomio es primo.

   a. $6x^2 - 6x - 36$

   b. $x^3 - x^2 - 56x$

   c. $2x^7 - 14x^6 - 36x^5$

   d. $3x^3 y^3 - 6x^3 y^2 - 45x^3 y$

   e. $5x^3 y^5 + 10x^2 y^5 - 75xy^5$

   f. $3x^2 + 11x - 20$

   g. $15y^2 + 26y + 8$

   h. $10z^2 + 11z - 6$

   i. $15z^2 - 11z - 12$

   j. $6x^2 - x - 57$

   k. $15y^2 - 16y + 4$

   l. $3y^2 - 17y + 20$

3. Factora las siguientes expresiones:

   a. $x^2 - 4$

   b. $49x^2 - 16$

   c. $64 - w^2$

   d. $49 - 16x^2$

   e. $4x^2 - 25y^2$

   f. $81a^3 - 4a$

   g. $100a^4 - 32b^2$

   h. $x^4 - 16$

4. Factora la suma o diferencia de cubos:

   a. $u^3 + v^3$

   b. $u^3 - v^3$

   c. $x^3 - 8$

   d. $x^3 + 64$

   e. $729 + z^3$

   f. $64x^3 - 1$

   g. $1000y^3 - 343$

   h. $27x^3 - 125$

5. Factora lo máximo posible

   a. $x^3 + 2x^2 - 35x$

   b. $5x^2 - 60x + 5x^3$

   c. $4t^5 - 4t^4 - 48t^3$

   d. $xy + 10x - 8y - 80$

   e. $xy - 5yz + 7x - 35z$

   f. $8x^2 + 10x + 12x + 15$

Trabajo en clase con el docente.
Postula un ejemplo sobre el tema y desarrolla:

g. $25p^4 - 20p^3 + 4p^2$

h. $16k^3 m - 40k^2 m^2 + 25km^3$

i. $z^2 - 36$

j. $4a^3 - 49a$

k. $50x^2 y - 18y$

l. $4x^6 - 4x^2$

m. $64m^2 - 9n^4$

n. $5x^6 - 5x^2$

o. $x^2 (x + 3) - 9(x + 3)$

p. $-3x^3 y - 2x^2 y^2 + 5xy^3$

q. $x^3 - 729$

r. $x^9 - 1$

s. $54x^4 - 250xy^3$

t. $875x^3 - 189x^6$

1.5 Expresiones racionales

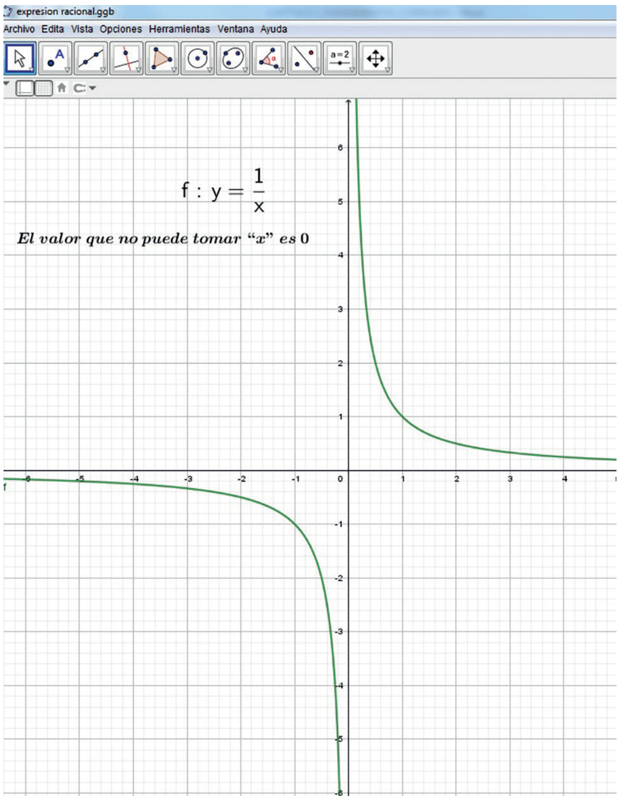
Una expresión racional es una expresión fraccionaria donde tanto el numerador como el denominador son expresiones algebraicas:

$$\frac{2x}{x^2+5} \qquad \frac{x^3}{x^8+6x} \qquad \frac{x^4-5}{3x^4+5x+7}$$

Dominio de una expresión algebraica

El dominio de una expresión fraccionaria son todos los valores de la variable en el conjunto de los reales que hacen que la expresión esté definida.

Ilustración 23
Gráfica de una función racional.



Fuente: Geogebra 2017

En la siguiente tabla se proporciona algunas expresiones básicas y sus dominios.

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

Ejemplos de dominio de expresiones algebraicas

Calcula el dominio de las siguientes expresiones:

1. $x^2 + 5x + 6$

Este polinomio está definido para todo valor de **x**, por lo tanto, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

2. $\frac{x}{x^2+5x+6}$

Primero se factoriza el denominador

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{x}{(x+3)(x+2)}$$

Trabajo en clase con el docente.
Postula un ejemplo sobre el tema y resuélvelo:

Para que el denominador no sea cero

$(x + 3) \neq 0$ o $(x + 2) \neq 0$
$x \neq -3$ o $x \neq -2$

El dominio de la expresión es $\{x \mid x \neq -3 \text{ y } x \neq -2\}$

3. $\dfrac{\sqrt{x}}{x+6}$

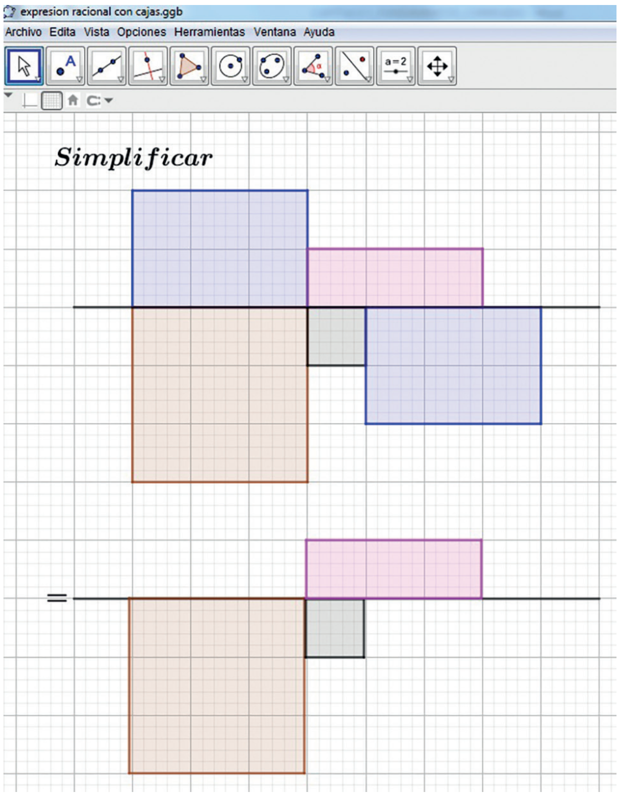
Para que el denominador no sea cero

$x + 6 \neq 0 \,;\, x \neq -6$

Además, se debe considerar que $\sqrt{x} \geq 0 \,;\; x \geq 0$

El dominio de la expresión es $\{x \mid x \neq -6 \text{ y } x \geq 0\}$

Ilustración 24
Gráfica de simplificación de fracciones en función de propiedades.



Fuente: Geogebra 2017

Operaciones con expresiones racionales

Para simplificar expresiones racionales se factoriza tanto el numerador como el denominador y se aplica la siguiente propiedad:

$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$	Esto permite simplificar los factores comunes del numerador y del denominador.
$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$	Para multiplicar dos fracciones se multiplica numeradores y denominadores.
$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$	Para dividir una función de otra, se invierte el divisor y multiplicamos.
$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$	Para sumar o restar expresiones racionales se determina el mínimo común denominador (MCD) y se opera.

1. Simplifica:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$$

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+2)}$$

Para que el denominador no sea cero

$$(x+2)\neq 0$$
$$x\neq -2$$

El dominio de la expresión es $\{x \mid x\neq -2\}$

Luego se simplifican factores comunes:

$$\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+2)\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{x+2}$$

2. Simplifica:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-x-2}{3x+9}$$

$$=\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-2)}\cdot\frac{(x-2)(x+1)}{3(x+3)}$$

Errores y correcciones frecuentes

Error: $\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$

Corrección: $\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B+C}$

Error: $\frac{A}{A+C} = \frac{1}{C}$

Corrección: $\frac{A}{A+C} = \frac{A}{A+C}$

Error: $\frac{A+B}{C+D} = \frac{A}{C} + \frac{B}{D}$

Corrección: $\frac{A+B}{C+D} = \frac{A}{C+D} + \frac{B}{C+D}$

Error: $\frac{A}{C} \div \frac{B}{A} = \frac{BC}{A^2}$

Corrección: $\frac{A}{C} \div \frac{B}{A} = \frac{A^2}{BC}$

Para que el denominador no sea cero

$$(x-2) \neq 0 \text{ y } (x+3) \neq 0$$
$$x \neq 2 \text{ y } x \neq -3$$

El dominio de la expresión es $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq -3\}$

Luego se simplifican factores comunes:

$$= \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{3(x+3)}$$

$$= \frac{(x+1)}{3}$$

3. Simplifica:

$$\frac{x-5}{x^2-25} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+10x+25} =$$

$$\frac{x-5}{x^2-25} \cdot \frac{x^2+10x+25}{x^2-3x-4} =$$

$$\frac{x-5}{(x-5)(x+5)} \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{(x-4)(x+1)}$$

Para que el denominador no sea cero

$$x-5 \neq 0, x+5 \neq 0, x-4 \neq 0 \text{ y } x+1 \neq 0$$
$$x \neq 5, x \neq -5, x \neq 4 \text{ y } x \neq -1$$

El dominio de la expresión es

$$\{x \mid x \neq 5, x \neq -5, x \neq 4 \text{ y } x \neq -1\}$$

$$= \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{x-5}{(x-4)(x+1)}$$

4. Simplifica:

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

Trabajo en clase con el docente.
Postula un ejemplo sobre el tema y resuélvelo:

Se factoriza el denominador

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

Para que el denominador no sea cero

$$x - 1 \neq 0 \text{ y } x + 1 \neq 0$$
$$x \neq 1 \text{ y } x \neq -1$$

El dominio de la expresión es $\{x \mid x \neq 1 \text{ y } x \neq -1\}$

Se determina el MCD y se opera

$$= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)\,(x+1)^2} = \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{3 - x}{(x-1)(x+1)^2}$$

Ejercicios 1.5
Expresiones racionales

1. Determina el dominio de las siguientes expresiones.

a. $4x^2 - 10x + 3$

b. $\dfrac{2x+1}{x-4}$

c. $\sqrt{x+3}$

d. $\dfrac{2s^2-5}{3s+6}$

e. $\dfrac{a^2+a}{a^2-a}$

f. $\dfrac{2t^3 - t^2 - 6t}{2t^2 - 7t + 6}$

g. $\dfrac{1-v^2}{v^2-1}$

h. $\dfrac{1}{\sqrt{1-b}}$

i. $\dfrac{c^3 + c^2}{c^2 - 2c - 3}$

j. $\dfrac{1+x}{x^2+5}$

2. Opera y simplifica las siguientes expresiones. Escribe las restricciones para que la expresión sea definida.

a. $\dfrac{4p-4}{p} \cdot \dfrac{4p^2}{9p-9}$

b. $\dfrac{3z^3}{4} \cdot \dfrac{32}{z^2}$

c. $\dfrac{5y}{10y+5} \cdot \dfrac{4y+2}{3}$

d. $\dfrac{x^2 - 8x + 3x - 24}{4x^2 + 7x + 12x + 21}$

e. $\dfrac{y^3 - 343}{y - 7}$

f. $\dfrac{t^3+1}{t^3 - t^2 + t} \cdot \dfrac{7t}{-84t - 84}$

g. $\dfrac{4a}{8a+4} \cdot \dfrac{6a+3}{5}$

h. $\dfrac{b^2 + 7b + 10}{b^2 + 14b + 45} \cdot \dfrac{b^2 + 11b + 18}{b^2 + 4b + 4}$

i. $\dfrac{x^2 + 11x + 28}{x^2 + 15x + 56} \cdot \dfrac{x^2 + 8x}{x^2 - 2x - 24}$

j. $\dfrac{v^2 - 10v + 24}{v^2 - 3v - 18} \cdot \dfrac{v^2 - 9}{v^2 - 16}$

3. Opera y simplifica las siguientes expresiones. Escribe las restricciones para que la expresión sea definida.

a. $\dfrac{2x^2}{3} \div \dfrac{x^3}{21}$

b. $\dfrac{z^2 + 6z + 8}{z^2 + 7z + 12} \div \dfrac{z^2 + 2z}{z^2 + 12z + 27}$

c. $\dfrac{35x^2 + 31xy + 6y^2}{35x^2 + 32xy - 12y^2} \div \dfrac{35x^2 - 9xy + 18y^2}{35x^2 + 12xy - 36y^2}$

d. $\dfrac{(y-11)^2}{2} \div \dfrac{2y-22}{4}$

e. $\dfrac{24x-24}{9} \div \dfrac{8x-8}{99}$

f. $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{4x^2 - 16x} \div \dfrac{7x-28}{21}$

g. $\dfrac{p^2 - 3p + pq - 3q}{8p^2 - 8q^2} \div \dfrac{p-3}{7p-7q}$

h. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{8x - 24} \div \dfrac{5x - 15}{40}$

i. $\dfrac{a^2 + 12a + 36}{a^2 + 15a + 54} \div \dfrac{a^2 + 6a}{a^2 + 16a + 63}$

j. $\dfrac{6a-6}{a} \div \dfrac{9a-9}{7a^2}$

k. $\dfrac{a^2-9}{3a-3} \div \dfrac{a^2 + 6a + 9}{a^2 + 2a - 3}$

4. Realiza la operación y simplifica las siguientes expresiones. Escribe las restricciones para que la expresión sea definida.

a. $\frac{9}{21x} - \frac{7}{21x}$

b. $\frac{5x+6}{(x+2)(x-10)} - \frac{4x+4}{(x+2)(x-10)}$

c. $\frac{2}{x} + 4$

d. $\frac{32}{8x} + \frac{63}{9x}$

e. $\frac{x}{5x-9} - \frac{9}{10x-18}$

f. $\frac{2-x}{x-6} - \frac{2x-1}{6-x}$

g. $\frac{7y}{x^2-y^2} + \frac{7x}{y^2-x^2}$

h. $\frac{3}{y^2-3y+2} + \frac{5}{y^2-1}$

i. $\frac{x}{x^2-16} - \frac{3}{x^2+5x+4}$

j. $\frac{x^2+24}{x^2+5x-24} + \frac{8-10x}{24-5x-x^2}$

k. $\frac{x+4}{x^2+5x-6} + \frac{5x-1}{x^2-3x+2}$

l. $\frac{m+5}{m^2+6m-16} + \frac{5m-6}{m^2+7m-8}$

m. $\frac{y^{-1}+(y+1)^{-1}}{11}$

5. Realiza la operación solicitada y simplifica las siguientes expresiones. Esribe las restricciones para que la expresión sea definida.

a. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x^2-x}$

b. $\frac{a}{a^2-a-6} - \frac{1}{a+2} - \frac{2}{a-3}$

c. $\frac{1}{b+1} - \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{3}{b^2-1}$

d. $\dfrac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$

e. $x - \dfrac{y}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$

f. $\dfrac{\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}}$

6. Responde en la casilla de la derecha verdadero o falso según corresponda:

Enunciado	Verdadero o falso
a. Una expresión racional es una expresión fraccionaria donde tanto el numerador como el denominador son polinomios.	
b. El dominio de una expresión algebraica es el conjunto de los **números reales** que se permite tener a la variable.	
c. El dominio de una expresión algebraica es el conjunto de los números que se permite tener a la variable.	

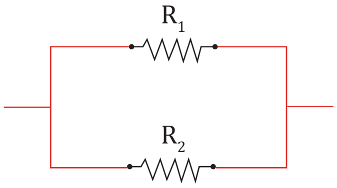
7. Realiza el procedimiento necesario en el siguiente ejercicio para llegar a la respuesta correcta:

$$\dfrac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \text{.................................}$$

$$\text{.................................} = \frac{-1}{a(\_\_ + h)}$$

8. Si dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (véase la figura), entonces la resistencia equivalente está representada por:

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$



   a. Encuentra el dominio y simplifica la expresión.

   b. Si: $R_1 = 10 \text{ ohm y } R_2 = 20 \text{ ohm}$, ¿cuál es el valor numérico de la resistencia equivalente?

9. Una empresa electrónica determina que el costo de la producción de "n" tarjetas electrónicas de sonido es $500 + 6n + 0{,}01n^2$ dólares.

   a. ¿Cuál es el costo promedio en expresión racional de cada tarjeta electrónica?

   b. ¿Cuál sería el dominio de la expresión encontrada en el literal **a**?

Resumen de operaciones con expresiones algebraicas (factoreo)

Binomios (2 términos)		
Expresión algebraica	**Expresión factorizada**	**Nombre**
⊳ $4a^3 b - 12a^2 b^3$	$4a^2 b(a - 3b^2)$	Factor común
• $a^2 - b^2$ • $25p^2 - 121w^2$ • $\square^2 - \triangle^2$	$(a + b)(a - b)$ $(5p + 11w)(5p - 11w)$ $(\square+\triangle)\cdot(\square-\triangle)$	Diferencia de cuadrados
• $a^3 - b^3$ • $27m^3 - 125n^3$	$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $(3m - 5n)(9m^2 + 15mn + 25n^2)$	Diferencia de cubos
• $a^3 + b^3$ • $64x^3 + y^3$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $(4x + y)(4x^2 - 4xy + y^2)$	Suma de cubos
Trinomios (3 términos)		
Expresión algebraica	**Expresión factorizada**	**Nombre**
⊳ $25x^2 y^3 - 15x^4 y^2 + 45x^2 y^2$	$5x^2 y^2 (5y - 3x^2 + 9)$	Factor común
• $a^2 + 2ab + b^2$ • $a^2 - 2ab + b^2$ • $25x^2 - 20xy^2 + 4y^4$	$(a + b)^2$ $(a - b)^2$ $(5x - 2y^2)^2$	Trinomio cuadrado perfecto
• $x^2 + 3x - 54$ • $a^2 - 17ab + 72b^2$	$(x + 9)(x - 6)$ $(a - 9b)(a - 8b)$	Trinomio $x^2 \pm bx \pm c$
• $2x^2 + \mathbf{5x} - 3$ $x \to \cdot -1 = -x$ $2x \to \cdot\ 3 = \underline{6x}$ $\mathbf{5x}$ • $6a^2 - \mathbf{11ab} - 10b^2$ $2a \to \cdot\ 2b = 4ab$ $3a \to \cdot - 5b = \underline{-15ab}$ $\mathbf{-11ab}$	$(x + 3)(2x - 1)$ $(2a - 5b)(3a + 2b)$	Trinomio $ax^2 \pm bx \pm c$
Expresiones algebraicas de 4 o más términos		
Expresión algebraica	**Expresión factorizada**	**Nombre**
⊳ $18a^3 + 6a^5 - 24a^4 - 12a^3b$	$6a^3 (3 + a^2 - 4a - 2b)$	Factor común
• $2px - 3py - 4wx + 6wy$	$(2px - 3py) - (4wx - 6wy)$ $p(2x - 3y) - 2w(2x - 3y)$ $(2x - 3y)(p - 2w)$	Agrupación • Factor común • Factor común
• $x^2 - 10x + 25 - 121p^6$	$(x^2 - 10x + 25) - 121p^6$ $(x - 5)^2 - 121p^6$ $(x - 5 + 11p^3)(x - 5 - 11p^3)$ $(11p^3 + x - 5)(x - 11p^3 - 5)$	Agrupación • Trinomio cuadrado perfecto • Diferencia de cuadrados

Excursiones matemáticas

1. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Toda potencia cuyo exponente es par tiene signo positivo.

b. Al elevar una fracción propia a un exponente negativo, se obtiene una fracción impropia.

c. Al dividir un número para cero, el resultado es el mismo número.

2. Encuentra los valores de estas series de potencias y contesta las preguntas planteadas.

- $1^2, 1^6, 1^{20}, 1^{-2}, 1^{-6}, 1^{-20}$
- $(-1)^1, (-1)^2, (-1)^5, (-1)^7, (-1)^8$
- $(-1)^{-1}, (-1)^{-2}, (-1)^{-5}, (-1)^{-7}, (-1)^{-8}$

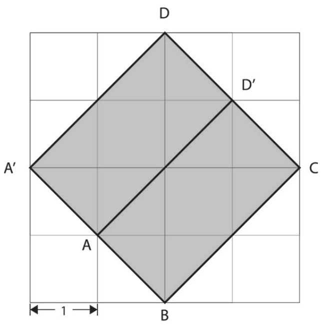
a. ¿Cuánto valen todas las potencias de base 1? ¿Influye el valor del exponente?

b. ¿Cuánto valen todas las potencias de base -1 y exponente impar?

c. ¿Cuánto valen todas las potencias de base -1 y exponente par?

d. ¿Cuál será el resultado de $(-1)^{-2023}$ y $(-1)^{-32346}$?

3. En la figura, compara el largo de $\overline{AB}$ y de $\overline{AC} + \overline{CB}$



a. ¿Cuál es la longitud más grande?

b. Calcula las longitudes y compara

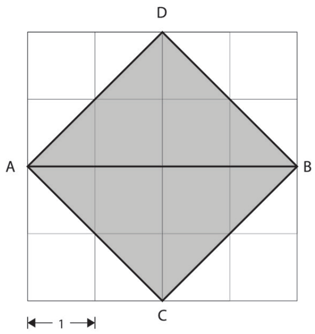
$$\sqrt{(8+8)} \text{ y } \sqrt{8} + \sqrt{8}$$

4. Calcula, compara y determina una conclusión de los siguientes ejemplos.

$$\sqrt{(9+16)} \text{ y } \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{(25-16)} \text{ y } \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

5. En la figura, demuestra que $\overline{AB} = \sqrt{2}$ cm y $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ cm. Luego calcula el área del cuadrado ABCD.



6. Calcula y simplifica los siguientes ejercicios.

$$\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{2p} - 5\sqrt{q}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)$$

$$\left(\sqrt{p+q} + \sqrt{p-q}\right)\left(\sqrt{p+q} - \sqrt{p-q}\right)$$

CAPÍTULO 2 : Trigonometría y números complejos

Objetivos:

2.1. Reconocer los sistemas de medida de los ángulos, obtener razones trigonométricas de un ángulo dado, aplicar las razones trigonométricas en diferentes contextos.
2.2. Definir un número complejo, enunciar las diferentes formas de expresarlo y realizar operaciones entre ellos.

Contenidos:

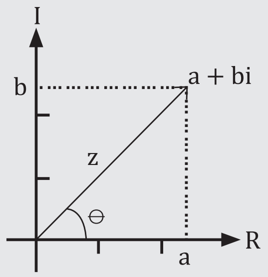
- En este capítulo, el estudiante encontrará los siguientes contenidos:
- Relación entre grados y radianes
- Teorema de Pitágoras
- Razones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Números complejos y sus formas de representación
- Operaciones entre números complejos

Reseña histórica:

Según Fernández Expósito (1999), la trigonometría tiene sus inicios hace más de 3000 años aproximadamente, para usar en la medición de terrenos para la agricultura y el desarrollo de la construcción. Los egipcios, por ejemplo, la usaron para la construcción de las pirámides, posteriormente se la usó en la astronomía y en el análisis del tiempo en relación con la posición del sol; fueron los egipcios quienes iniciaron con la medición de los ángulos en grados y su descomposición en minutos y segundos.

Según los apuntes matemáticos de la Universidad Bolivariana (2017), las raíces cuadradas de números negativos fueron encontradas en los trabajos de los griegos en el siglo I a. C., resultado imposible una sección negativa. Con el paso del tiempo se hicieron populares debido a la necesidad de encontrar raíces exactas en polinomios de segundo y tercer grado.

Los números complejos llegaron a tener una posición en el mundo moderno con la interpretación geométrica popularizada por Gauss, como se muestra en la siguiente ilustración:



De acuerdo con Mendoza (2001), los números complejos se muestran en el libro Ars magna de Girolamo Cardano, publicado en 1545. Este libro da a conocer algunos métodos de solución de una ecuación polinómica de grado tres.

Cardano indica que un método particular para la solución de la siguiente ecuación:

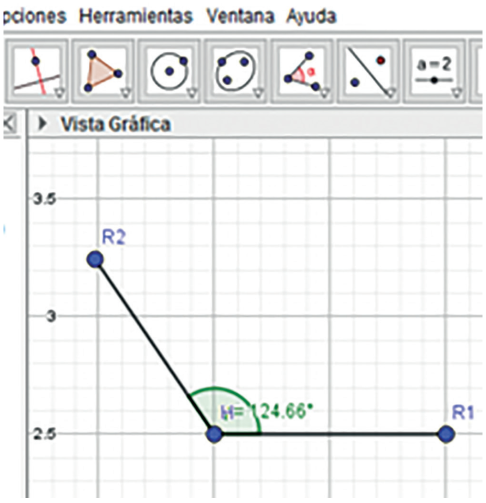
$$x^3 = 3px + 2q$$

Con la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

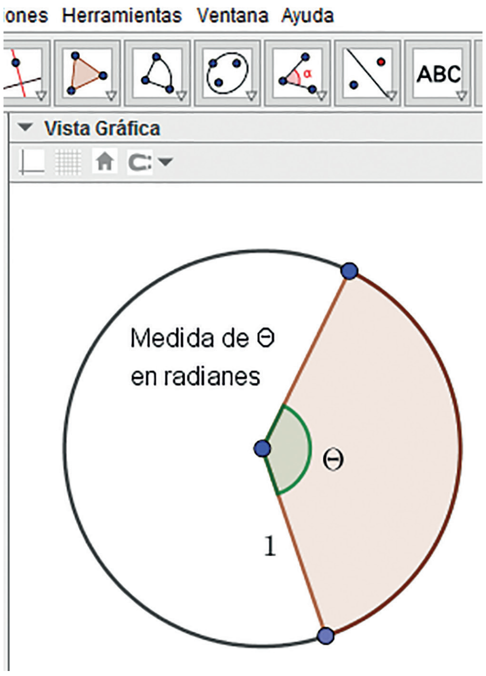
Esta se conoce como Fórmula de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano

Ilustración 25
Medida angular



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 26
Medida de ángulo en radianes



Fuente: Geogebra 2017

2.1 Trigonometría

La medida de un ángulo es la cantidad de rotación respecto al vértice requerida para mover R_1 sobre R_2. Una cantidad de medida para ángulos es el **grado.** Un ángulo de medida 1 se forma al rotar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de las matemáticas, se usa la medida en **radianes.**
Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en radianes (rad) es la longitud del arco que subtiende el ángulo.

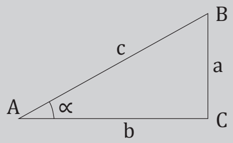
(Stewart, 2009).

Relación entre grados y radianes

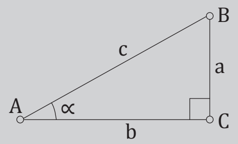
$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

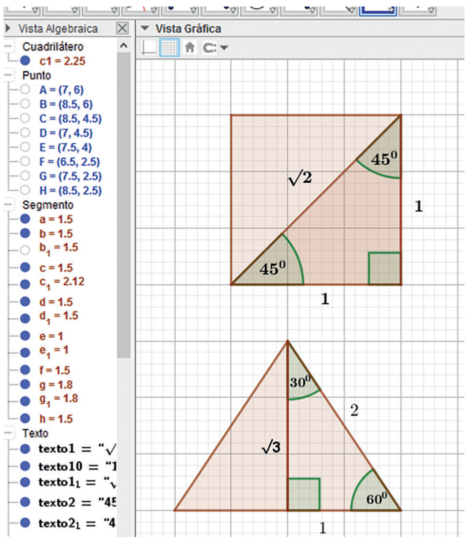


Relaciones o razones trigonométricas:
Considera un triángulo rectángulo con ∝ como uno de sus ángulos agudos.



$\text{sen} \propto = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\csc \propto = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$
$\cos \propto = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\sec \propto = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$
$\tan \propto = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\text{ctg} \propto = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Ilustración 27
Construcción de triángulos especiales



Fuente: Geogebra 2017

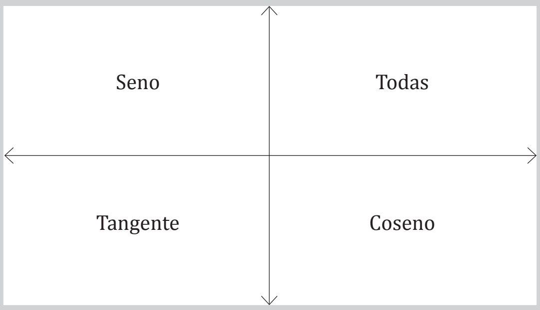
Dato Curioso

Podemos recordar con toda facilidad los senos y cosenos de los ángulos básicos escribiéndolos en la forma $\frac{\sqrt{\square}}{2}$

Todas las **Es**tudiantes **T**oman **C**álculo

t	sen t	cos t
0	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

La siguiente regla nemotécnica te ayudará a recordar los signos de las funciones trigonométricas:



Triángulos especiales: Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del teorema de Pitágoras. Aquí se mencionan ya que se utilizan con frecuencia.

Valores trigonométricos de ángulos especiales:

Razón	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\text{sen} \propto$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \propto$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \propto$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	-

Identidades trigonométricas

Recíprocas y razón

$\text{sen} \propto = \frac{1}{\csc \propto}$;	$\text{sen} \propto \cdot \csc \propto = 1$
$\cos \propto = \frac{1}{\sec \propto}$;	$\cos \propto \cdot \sec \propto = 1$
$\tan \propto = \frac{1}{\text{ctg} \propto}$;	$\tan \propto \cdot \csc \propto = 1$
$\tan \propto = \frac{\text{sen} \propto}{\cos \propto}$	
$\text{ctg} \propto = \frac{\cos \propto}{\text{sen} \propto}$	

Pitagóricas

$\text{sen}^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$
$\sec^2 \propto = 1 + \tan^2 \propto$
$\csc^2 \propto = 1 + \text{ctg}^2 \propto$

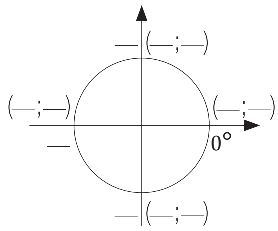
Signos de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas primero se determinan los signos, estos dependen de los cuadrantes en los que se encuentre el ángulo:

Cuadrante	Función positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, ctg
III	tan, ctg	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, ctg

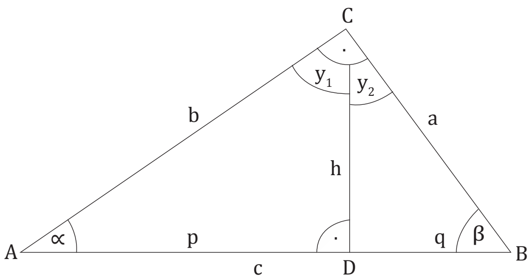
Ejercicios 2.1
Trigonometría

1. Completa la tabla de acuerdo con los valores que debe tener el círculo trigonométrico.



Razón	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
sen ∝				
cos ∝				
tan ∝				

2. Observa la figura y completa la tabla.

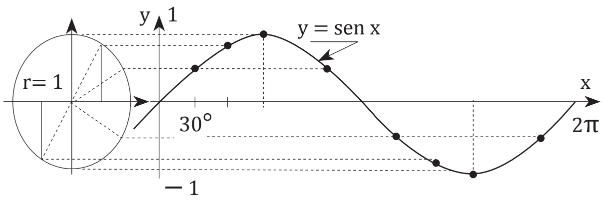


	Δ ABC		Δ DBC	
	∝	β	β	y_2
tan				
			$\frac{h}{a}$	
				$\frac{h}{a}$

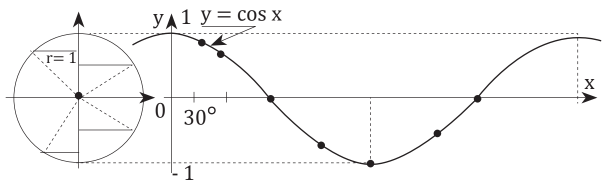
3. Los catetos de un triángulo rectángulo son **p** y **q**, su hipotenusa es **r**. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo más pequeño.

   a. $p = 4; r = 5$
   b. $q = 8; r = 10$
   c. $p = 5; q = 12$

4. Observa las gráficas de las funciones seno y coseno y completa las tablas:



sen ∝	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Valor					



cos ∝	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Valor					

5. Un ángulo agudo tiene $\text{sen} \propto = \frac{3}{5}$

   Halla las restantes razones trigonométricas de este ángulo.

6. En los siguientes ejercicios, determina las otras funciones trigonométricas, si **x** pertenece al intervalo que se especifica.

   a. $\cos x = \frac{1}{2}; x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

   b. $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}; x \in [0,2\pi]$

   c. $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

7. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

   a. $\tan x + \text{ctg}\, x = \sec x \cdot \csc x$

   b. $\frac{1}{1 + \text{sen}\, \alpha} + \frac{1}{1 - \text{sen}\, \alpha} = 2 \sec^2 \alpha$

   c. $\frac{1 - \cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{\text{sen}\, \alpha}{1 + \cos \alpha}$

   d. $\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 1 - 2\, \text{sen}^2 \theta$

   e. $\frac{\sec y}{\tan y + \text{ctg}\, y} = \text{sen}\, y$

   f. $\frac{\tan x - \text{sen}\, x}{\text{sen}^3 x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$

2.2 Números complejos

Los números complejos constituyen un conjunto extensión de los números reales. Este conjunto se denota con la notación (C, e incluyen todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales. Todo número complejo puede representarse como la suma de un número real y un número imaginario, forma polar o forma trigonométrica.

a es la parte real **b** es la parte imaginaria

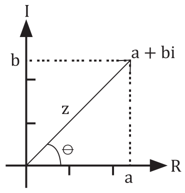
$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$a + bi$

como

Forma Binómica



$|z|$ es módulo

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ es el argumento

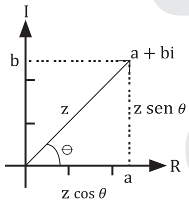
$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

como

$Z\theta$

como

Forma Polar



$a = |z| \cos\theta$

$b = |z| \operatorname{sen}\theta$

como

$z_\theta = |z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

como

Forma Trigonométrica

se expresa en

números complejos

Ejemplo de operaciones con los complejos:

Suma

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(3 + 5i) + (2 + 4i) = (3 + 2) + (5 + 4)i = 5 + 9i$$

Resta

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$
$$(4 + 3i) - (2 + 2i) = (4 - 2) + (3 - 2)i = 2 + i$$

Multiplicación

recordar

$i^2 = -1$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\\ (3 + 5i)(2 + 4i) &= 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4i + 5i \,.\, 2 + 5i \cdot 4i\\ &= 6 + 12i + 10i + 20i^2\\ &= 6 + 22i - 20\\ &= -14 + 22i\end{aligned}$$

División

recordar

$z = a + bi$
su conjugado
$\bar{z} = a - bi$

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)}\\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i\\ \frac{1 + 2i}{2 + 3i} &= \frac{(1 + 2i)}{(2 + 3i)} \cdot \frac{(2 - 3i)}{(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i + 4i - 6i^2}{4 - 9i^2}\\ &= \frac{2 + i + 6}{4 + 9} = \frac{8 + i}{13}\\ &= \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i\end{aligned}$$

Ejercicios 2.2
Números complejos

1. En forma geométrica, representa gráficamente los siguientes números complejos:

   a. $3 + 2i$
   b. $-2 + i$
   c. $(-2 - 2i) - (-5 + 5i)$

2. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos y representa graficamente:

   a. $z = -i + 1$
   b. $z = -\sqrt{3} - i$
   c. $z = -1 - i$

3. Expresa los siguientes números complejos en forma polar:

   a. $z = -i + 1$
   b. $z = -i + \sqrt{3}$
   c. $z = -2 - 2i$

4. Representa en forma trigonométrica los siguientes números complejos (calcula su módulo y argumento):

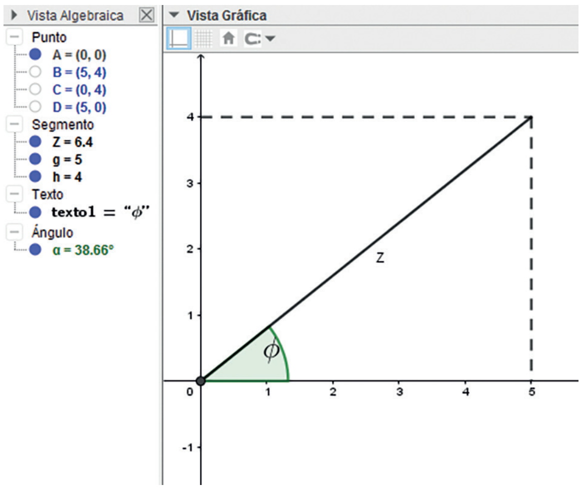
   a. $z = -\sqrt{3} + i$
   b. $z = 1 - i$
   c. $z = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

5. Calcula el resultado de las siguientes operaciones y representa la respuesta en forma binómica:

   a. $(8 + 3i) + (10 + 2i) + (4 + 5i)$
   b. $(10 + 5i) - (6 - 4i) - (-5 + 2i)$
   c. $\left(-\frac{5}{3} - i\right) + \left(1 - \frac{3}{2}i\right)$
   d. $\left(-\frac{1}{4} - 6i\right) - \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{2}i\right)$
   e. $\left(-8 + \frac{3}{5}i\right) + \left(-\frac{7}{4} + \frac{7}{10}i\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{10}i\right)$
   f. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\right)$

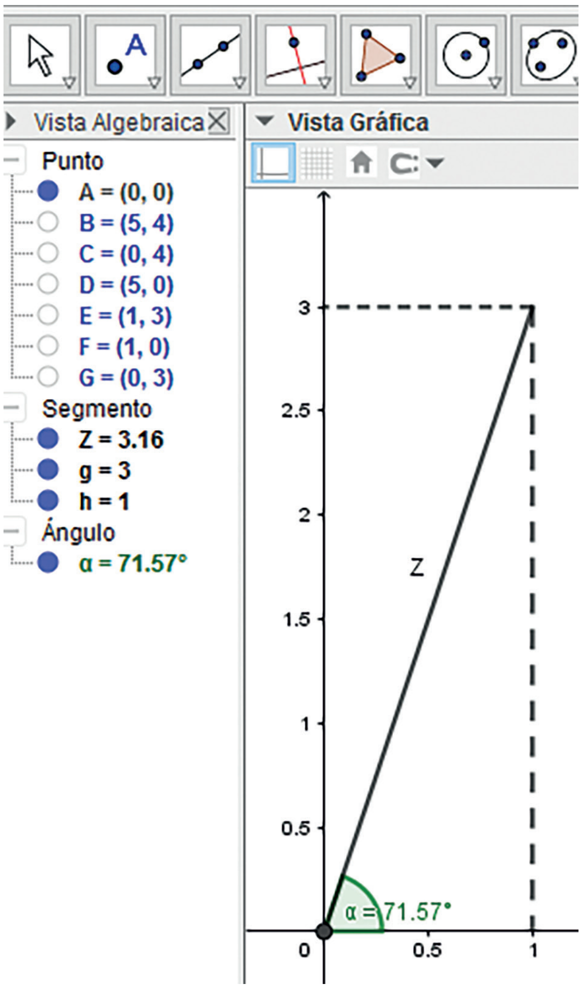
6. Dada la forma geométrica, representar en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

a.



Fuente: Geogebra 2017

b.



Fuente: Geogebra 2017

7. Calcula el resultado de las siguientes operaciones y representa la respuesta en forma binómica:

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\right)$

b. $\frac{-4 + 2i}{1 + i}$

c. $\frac{4 + 2i}{i}$

d. $\frac{5 - 7i}{2 + i}$

e. $\frac{3 + 2i}{2 - i}$

f. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \div \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\right)$

8. Calcula las potencias:

a. $(4 - 3i)^2$
b. $(1 + i)^3$

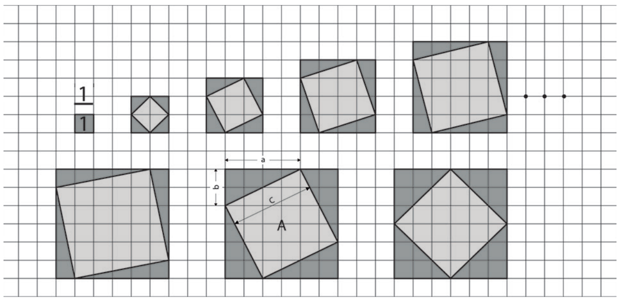
9. Calcula los productos $z_1 \cdot z_2$

a. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right);\ z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right);\ z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

Excursiones matemáticas

1. Cada cuadrado ilustrado en la figura puede cortarse en 4 triángulos congruentes, azules un nuevo cuadrado, verde respectivamente.



   a. Calcula el área de cada cuadrado verde como diferencia del área del cuadrado grande y de los 4 triángulos azules.

   b. ¿Qué relación encuentras entre el área cuadrado verde y las longitudes de los dos que forman el ángulo recto?

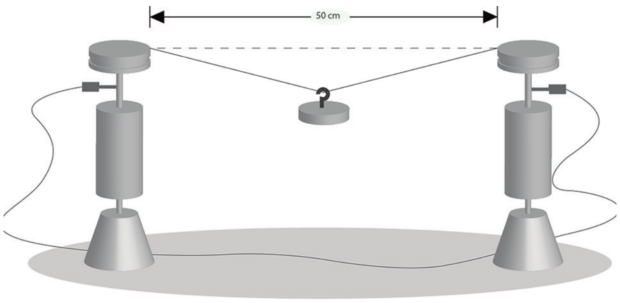
2. Hace aproximadamente 4500 años se construyó la pirámide de Keops, la pirámide más grande de Egipto.

https://bit.ly/2ES5Ej5

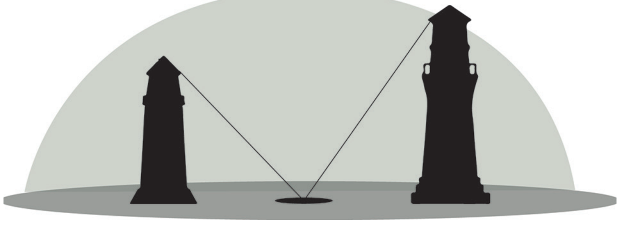
   a. La base cuadrada de la pirámide de Keops medía originalmente 233 m de largo. La arista de las caras de la pirámide medía 221 m de largo. Calcula la altura original.

   b. Hoy en día, la arista de la base de la pirámide Keops mide 227 m y la arista de las caras 221 m. ¿En cuántos metros disminuyó la altura de la pirámide?

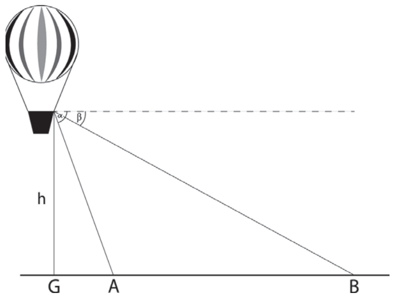
3. Si pasa corriente eléctrica por un alambre (como se muestra en la figura), entonces el alambre se calienta. De ese modo se dilata y cambia la longitud del alambre, ocasionando que descienda un cuerpo que cuelga de él. Calcula en cuánto cambió la longitud de un alambre que mide 50 cm de largo, si el cuerpo desciende 2 cm.



4. En un terreno plano se encuentran dos torres, de las cuales una mide 60 pies de altura y la otra, 80 pies de altura, como se presenta en la figura. Están a una distancia de 100 pies. Para ambos pájaros el recorrido mide igual desde la punta de la torre hasta el pozo. ¿Cuáles son las distancias del pozo a las torres?



5. Un globo aerostático se encuentra sobre un punto G, que, a su vez, se encuentra en una pista recta en un terreno plano. Los lugares A y B, que también se encuentran en esta pista, tienen los ángulos de depresión $\alpha=60°$ y $\beta=30°$. Si la distancia $AB = 1500$ metros, determina la altura del globo con respecto al punto G.



CAPÍTULO 3 : Ecuaciones

Objetivos:

3.1. Resolver ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.
3.2. Comprender que el conjunto solución de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas es un subconjunto de los números reales.
3.3 Reconocer cuándo un problema puede ser modelado, utilizando una ecuación lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica.

Contenidos:

En este capítulo el estudiante encontrará los siguientes contenidos:

- Técnicas de despeje de ecuaciones.
- Métodos de solución para ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.
- Aplicación de ecuaciones en la vida cotidiana.

Reseña histórica:

La resolución de ecuaciones lineales fueron problemas planteados por los egipcios, quienes resolvieron ecuaciones lineales del tipo $x+ax=b$ o $x+ax+bx=c$, siendo a, b y c números conocidos y la variable x es desconocida. Al número desconocido se le llamaba 'aha' o 'montón' (Boyer, 1986). El método que se utilizaba para la resolución de ecuaciones lineales hoy en día se le conoce con el nombre de la falsa posición.

El siguiente problema aparece en el Papiro Rhind (XVII a. C.) como un ejemplo de ecuación algebraica: «Un montón y una séptima parte del mismo es igual a 24». Esta ecuación, utilizando el lenguaje simbólico moderno, se escribe así:

$$x + \frac{1}{7} \cdot x = 24, \text{ donde } x$$

representa el "montón" al que se refiere el autor de este papiro.

Diofanto de Alejandría (III d. C.), presentó un ejemplo análogo, que se compone de las siguientes condiciones:

La juventud de Diofanto duró $\frac{1}{6}$ de su vida; se concluye que si su edad fue **x**, su juventud fue $\frac{x}{6}$.

Después se dejó la barba durante un periodo igual a $\frac{1}{12}$ de su vida.

Después de $\frac{1}{7}$ de su vida se casó. Cinco años más tarde tuvo un hijo. El hijo vivió exactamente la mitad del tiempo que vivió su padre.

Diofanto murió 4 años después de su hijo (Guelli, 1993).

Con la información se plantea la ecuación para calcular la edad de Diofanto, la cual es:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

$$\frac{3}{28}x = 8,$$

$$x = 84$$

En conclusión, Diofanto murió a los 84 años.

https://bit.ly/2QUmt1p
Papiro de Rhind (Galván 2013)

Ilustración 28
Función lineal

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

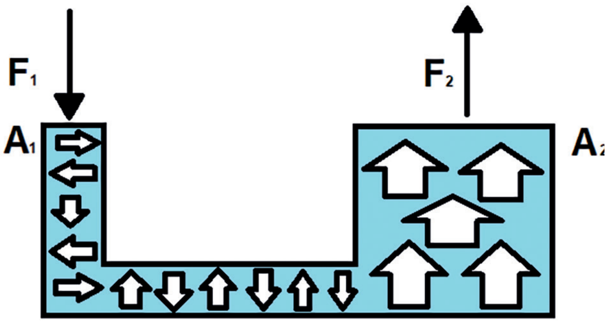
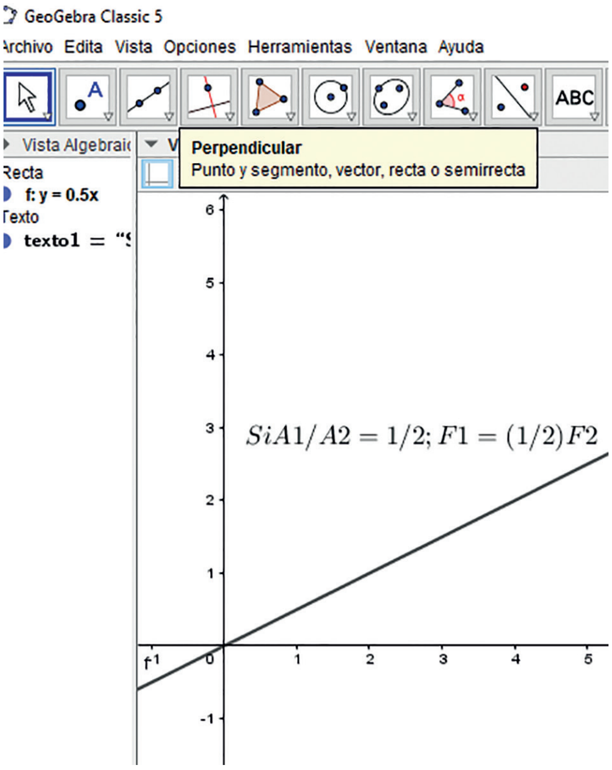


Ilustración 29
Representación gráfica de la ecuación de la fuerza F1 de la ilustración 28.



Fuente: Geogebra 2017

3.1 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Por ejemplo:

$$4 - (x + 5) = 2(2x - 4)$$
$$(5x - 3)^2 - 11(4x + 1) = 1$$

Propiedades de la igualdad

A, B y C representan cualquier expresión algebraica, donde:

$$A = B \leftrightarrow A + c = B + c$$

Al sumar la misma cantidad a ambos lados, se obtiene una ecuación equivalente

$$A = B \leftrightarrow cA = cB$$

Al multiplicar la misma cantidad a ambos lados, se obtiene una ecuación equivalente.

Resuelve la ecuación:

$$3x + 1 = x - 2$$

Es encontrar un valor de **x** que, al ser sustituido en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, se llegue a que la igualdad sea verdadera.

Para resolver una ecuación de primer grado se utilizan dos reglas:

a. Sumar o restar a los dos miembros un mismo número. En este caso restar 1 a los dos miembros y restar **x** a los dos miembros:

$$3x + 1 - 1 = x - 2 - 1$$
$$3x - x = x - x - 3$$
$$2x = -3$$

b. Multiplicar o dividir los dos miembros por un mismo número. En este caso dividir para 2:

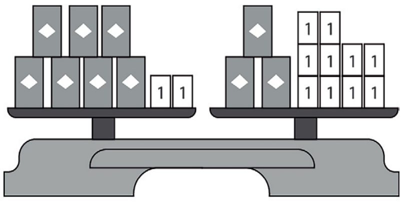
$$\frac{2}{2}x = -\frac{3}{2} \text{simplificado } x = -\frac{3}{2}$$

Para verificar que la solución $x = -\frac{3}{2}$ hace verdadera a la ecuación, sustituimos este valor y comprobamos:

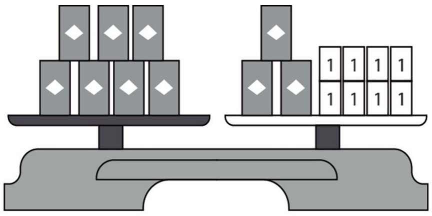
$$3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -\frac{3}{2} - 2$$

$$-\frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \text{ ¡Verdadero!}$$

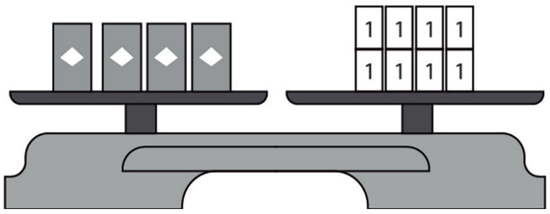
Ilustración 30
Resolución de una ecuación



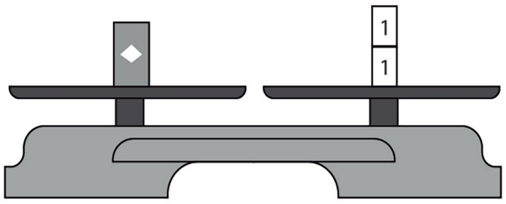
$$7 \cdot x + 2 = 3 \cdot x + 10$$



$$7x + 2 - 2 = 3x + 10 - 2$$
$$7x = 3x + 8$$



$$7x - 3x = 3x - 3x + 8$$
$$4x = 8$$



$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$
$$x = 2$$

Fuente: Propia
Gráficos (Burker M 1995)

3.2. Ecuaciones lineales o de primer grado

El tipo más simple de ecuación es la ecuación lineal o de primer grado. Son ecuaciones de la forma:

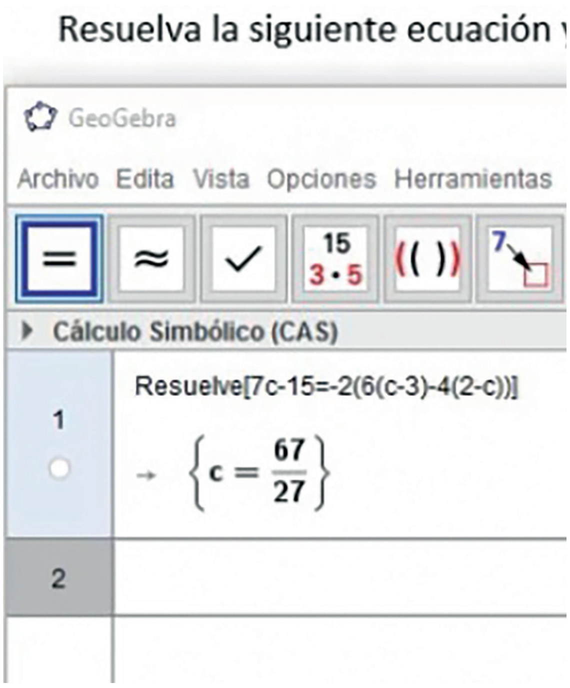
$$ax + b = 0$$

Ejemplos de ecuaciones de primer orden

1. Resuelve la ecuación lineal: $2(x-3) - 4(-5-2x) = 6x - 8$	
Solución:	
$2(x-3) - 4 - 5 - 2x) = 6x - 8$	Aplica la propiedad distributiva.
$2x - 6 + 20 + 8x = 6x - 8$	Simplifica términos semejantes:
$10x + 14 = 6x - 8$	
$4x + 14 = -8$	Resta 6x
$4x = -22$	Resta 14
$x = \frac{-22}{4}$	Divide para 4
$x = -\frac{11}{2}$	Simplifica.
La solución del ejercicio es: $x = -\frac{11}{2}$	Escribe la solución.

2. Resuelve la ecuación lineal $\frac{6}{x-3} - \frac{10}{x^2-9} = \frac{4}{x+3}$	
Solución:	
$\frac{6}{x-3} - \frac{10}{x^2-9} = \frac{4}{x+3}$	Calcula el mcm.
$\frac{6}{x-3} - \frac{10}{(x+3)(x-3)} = \frac{4}{x+3}$	Excluye valores: $x \neq 3$ y -3
$\frac{6(x+3) - 10}{(x+3)(x-3)} = \frac{4(x-3)}{(x+3)(x-3)}$	Aplica la propiedad distributiva.
$\frac{6x + 18 - 10}{(x+3)(x-3)} = \frac{4x - 12}{(x+3)(x-3)}$	Resta 4x, y resta 8, divide para 2 y despeja.
$6x + 8 = 4x - 12$ $2x = -20$ $x = -10$	
La solución del ejercicio es: $x = -10$	Escribe la solución.

Ilustración 31
Resolución de una ecuación de primer orden en una calculadora gráfica.



Fuente: Geogebra 2017

Dato Curioso

La palabra 'álgebra' procede del árabe, específicamente del título de un libro escrito por el matemático y astrónomo **Mohamed ben Mussa al Jwarizmi** (750-850), quien, en su obra más importante, Al-jabr, hace una exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones de primer orden (lineales) y segundo orden (cuadráticas). De su título deriva la palabra 'álgebra', y a pesar de que no empleó ningún símbolo, ni número, su traducción al latín ha servido para que posteriores algebristas continúen con su investigación.

(Stewart, 2007)

Se puede pensar en una ecuación como una balanza (ilustración 30), con el objetivo de configurar la ecuación para que sea más fácil resolverla, pero manteniéndola balanceada.

La propiedad aditiva de la igualdad y la propiedad multiplicativa de la igualdad explican cómo mantener la balanza, o la ecuación balanceada. Siempre que se realiza una operación a un lado de la ecuación, se aplica exactamente la misma operación al otro lado, se mantendrán iguales ambos lados de la ecuación.

Ejemplo de despeje de ecuaciones

$A = \frac{1}{2}(B + b)h$; despeja b	
$A = \frac{1}{2}(B + b)h$; despeja b	Multiplica por 2.
$2A = (B + b)h$	Divide por h.
$\frac{2A}{h} = B + b$	Resta b.
$\frac{2A}{h} - b = B$	Simplifica.
$\frac{2A - bh}{h} = B$	Amplifica por el mcm: h.
La solución es: $B = \frac{2A - bh}{h}$	Escribe la solución.

Importante tomar en cuenta:

- Despeja usando la operación inversa o el inverso aditivo (opuesto), utiliza la propiedad aditiva de la igualdad.
- Despeja usando la operación inversa o el inverso multiplicativo (recíproco), utiliza la propiedad multiplicativa de la igualdad para escribir la variable con un coeficiente de 1.

Ejercicios 3.2
Ecuaciones de primer grado y despejes

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba su solución:

   a. $-7x - 19 + 8x = -6$

   b. $-8x - 3 + 3x + 10 = 3$

   c. $\frac{1}{2}(x - 4) - \frac{1}{5}(x-5) = x+8$

   d. $-\frac{1}{5}(x + 10) - \frac{1}{5}(x - 5) = x + 5$

   e. $-\frac{1}{4}x - \left(x - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{40}(x + 2)$

   f. $6(x + 5) = 7\{x - (3 - x)\}$

   g. $-4(3x + 1) - 3 = -2(x + 1) + 3x$

2. Escribe el valor o valores para los cuales el denominador es cero. Luego resuelve la ecuación.

   a. $\frac{2}{x + 1} = \frac{3}{x - 1}$

   b. $\frac{3x + 2}{3x - 1} - \frac{6x}{6x - 1} = 0$

   c. $\frac{2(x + 3)}{4x^2 - 25} = \frac{2}{2x + 5} - \frac{4}{2x - 5}$

   d. $\frac{4x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 10$

3. Despeja de la fórmula dada la incógnita indicada.

   a. $v = LWH$; despejar H

   b. $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$; despejar h

   c. $A = \frac{1}{2}h(B + b)$; despejar B

   d. $S = 4\pi r^2$; despejar r^2

   e. $v_f = v_o + at$; despejar a

   f. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; despejar R_1

4. En la siguiente ecuación lineal: $ax + b = 0$; ¿la variable debe ser exclusivamente **x**? Justifica su respuesta.

5. En los siguientes pasos se detalla la solución de una ecuación de primer orden, completa los términos faltantes según corresponda para llegar a la solución:

   $7x - 4 = 3x + 8$

   $(7x - 4) + \_\_\_\_\_ = (3x + 8) + 4$

   $7x = 3x + 12$

   $7x - 3x = 3x + 12 - \_\_\_\_\_$

   $4x = 12$

   $(\_\_\_\_\_)4x = 12(\_\_\_\_\_)$

   $x = 3$

6. Resuelve las ecuaciones para la variable indicada:

   a. $W = 2s + 2t$; para "t"

   b. $5 = \frac{ay + b}{cy + d}$; para "y"

   c. $A = P + \left(1 + \frac{a}{100}\right)^2$; para "a"

   d. $s = 2s + \frac{2t}{5}$; para "t"

   e. $\frac{1}{5} = \frac{ay + b}{cy + d}$; para "y"

   f. $\frac{A}{c + b} = t + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2}$; para "a"

   g. $A = 2sw + 2wh + 2sh$; para "w"

   h. $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$; para "b"

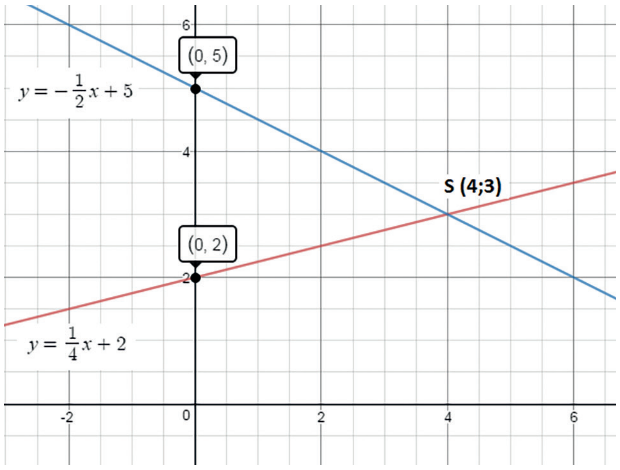
   i. $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{r}{1090}$; para "d"

   j. $2B - \frac{2sw}{2B} = 2wh + 2sh$; para "w"

   k. $z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{cb}{a}$; para "b"

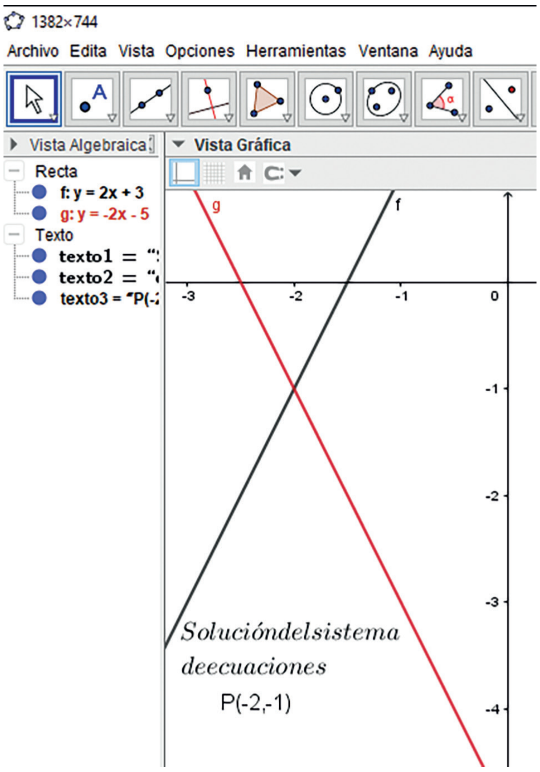
   l. $a_1 + a_2 = \frac{4}{\sqrt{d}} + \frac{r - 3}{1090}$; para "d"

Ilustración 32
Punto de intersección



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 33
Solución gráfica de un sistema de ecuaciones



Fuente: Geogebra 2017

3.3 Sistemas de ecuaciones lineales

La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de valores (x, y) que verifican las dos ecuaciones a la vez.

a. Método gráfico

Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$$

Se realiza una tabla de valores de cada una de las ecuaciones y se grafica las dos ecuaciones.

$y=\frac{1}{4}x+2$	
x	y
0	2
4	3

$y=-\frac{1}{2}x+5$	
x	y
0	5
4	3

El punto S (4;3) es la solución del sistema formado por las dos ecuaciones.

b. Método de igualación

Halla el punto de intersección de las rectas dadas por:

$$\begin{cases} x-4y=-8\ (1) \\ x+2y=10\ (2) \end{cases}$$

En (1) se despeja x ; $x=4y-8$

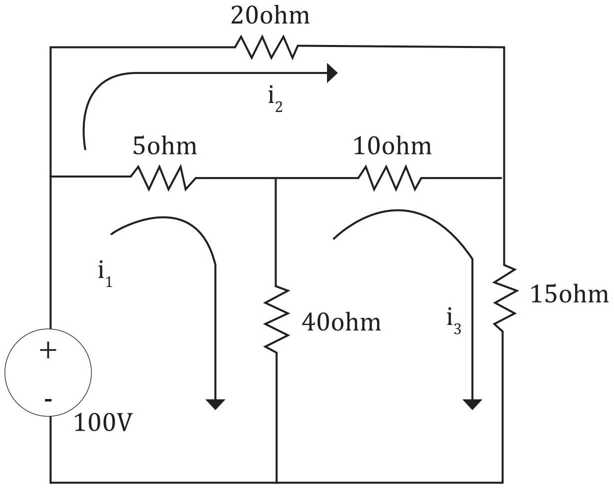
En (2) se despeja x ; $x=-2y+10$

Se iguala; $4y-8=-2y+10$, se resuelve $y=3$.

Este valor se reemplaza en una de las ecuaciones despejadas: $x=-2y+10$; $x=-2(3)+10$; $x=4$.

El conjunto solución es la intersección de las dos rectas en el punto $\{(4\,;3)\}$

Ilustración 34
Aplicación de sistemas de ecuaciones



Fuente: Creación propia

Dato Curioso

Sonya Kovalevsky
(1850-1891)

Es considera la matemática más importante del siglo XIX. Nació en Moscú en una familia aristocrática. En su infancia conoció el cálculo de una manera inusual, su recámara fue tapizada temporalmente con las páginas de un libro de cálculo. Tuvo un matrimonio por conveniencia que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemática de la Universidad de Gottingen porque la ley rusa prohibía a las mujeres estudiar en la universidad. Finalmente, obtuvo una plaza de profesora de tiempo completo en la Universidad de Estocolmo, donde trabajó ocho años antes de morir a sus 41 años. Su investigación fue útil para colocar, sobre una base sólida y lógica, las ideas y aplicaciones de las funciones y el cálculo. Recibió muchas distinciones y premios por su trabajo de investigación.

c. Método de sustitución

Determina el punto de intersección de las rectas dadas por:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 21 \ (1) \\ 3x - 4y = 25 \ (2) \end{cases}$$

En (1) se despeja x ; $x = \dfrac{21 - 7y}{4}$; este valor se reemplaza en (2)

$$3\left(\frac{21 - 7y}{4}\right) - 4y = 25;$$

$$\frac{63}{4} - \frac{21}{4}\,y - 4y = 25;$$

$$-\frac{37}{4}\,y = \frac{37}{4};$$

$$y = -1 \text{ en } (2)$$

$$3x - 4\,(-1) = 25;$$

$$3x = 21;$$

$$x = 7$$

La solución del sistema es $\{(7; -1)\}$

d. Método de reducción: suma y resta

Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \ (1) \\ 4x + y = 11 \ (2) \end{cases}$

Se trata de eliminar una variable sumando las igualdades. Se elimina la variable x.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21 \,|\cdot 4 \\ 4x + y = 11 \,|\cdot (\text{-}3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{12x} + 20y = 84 \\ \cancel{-12x} - 3y = -33 \\ \hline 17y = 51; \\ y = 3, \end{array}$$ Se suma:

Reemplaza en (1) o en (2):

$$4x + 3 = 11;\ \ 4x = 8;\ x = 2$$

La solución del sistema es la intersección de las rectas en el punto $\{(2;3)\}$.

Ejercicios 3.3
Sistemas de ecuaciones

1. Por el método de reducción, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a. $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x - 2y = 24 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 6x - 5y = -26 \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = -2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4} \end{cases}$

e. $\begin{cases} 9(x - 3) - 10(y + 3) = 19 \\ 6(2x - 9) = 25(y + 4) - 6 \end{cases}$

2. Resuelve, por el método gráfico y de igualación, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x + 2y = -2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + 7y = 21 \\ 3x - 4y = 25 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x = 2y - 1 \\ 2y - 7 = x \end{cases}$

3. Resuelve por el método de igualación y sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

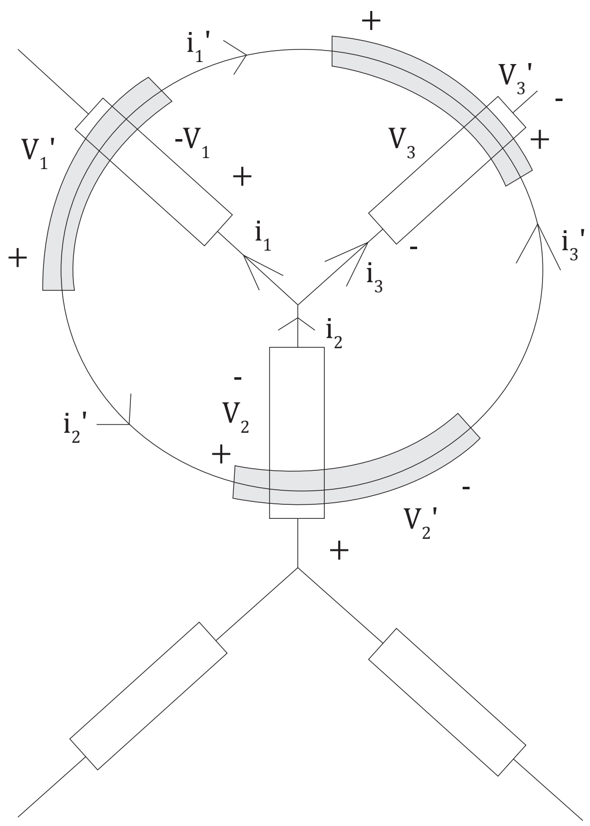
a. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + 2y = 9 \\ 5y - 4x - 5 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{6}{5}x - \frac{9}{10}y = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{20}y = \frac{1}{12} + \frac{4}{15}x \end{cases}$

4. Del siguiente gráfico se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:



Ecuación de nodo: $i_2 = i_1 + i_3$

Ecuación de malla: $V_3' + V_1' = V_2'$

Donde:

$V_3' = i_3 \cdot R_3$

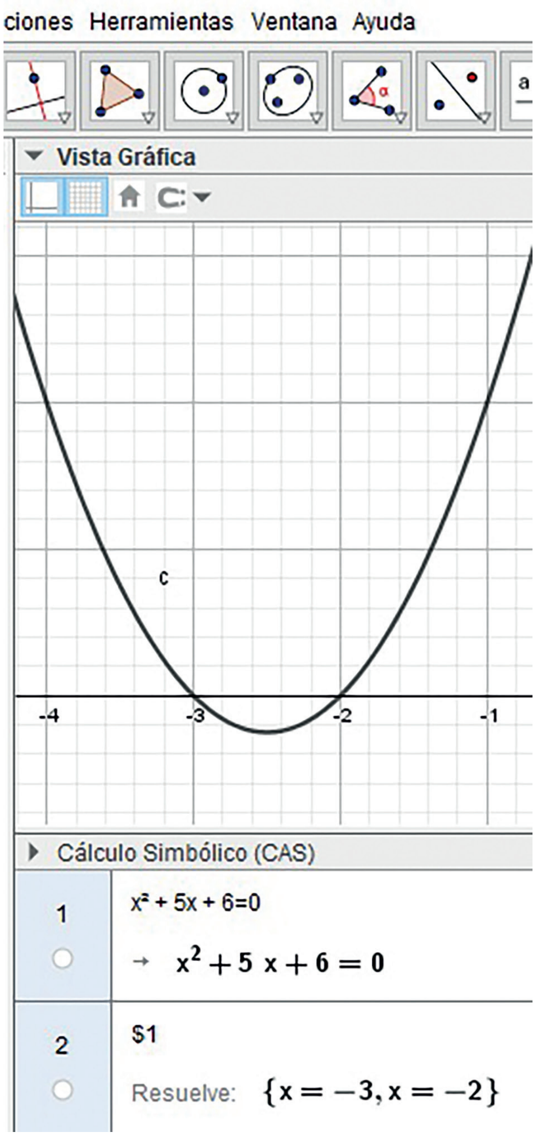
$V_2' = i_2 \cdot R_2$

$V_1' = i_1 \cdot R_1$

Con $i_1 = 0{,}5$ Amperios; $R_1 = 100\Omega\text{(ohmios)}$; $R_2 = 1000\Omega\text{(ohmios)}$; $R_3 = 500\Omega\text{(ohmios)}$

Calcula: i_2, i_3

Ilustración 35
Gráfica y solución de una ecuación de segundo orden



Fuente: Geogebra 2017

3.4 Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Las formas de resolución de una ecuación cuadrática se pueden determinar de la siguiente forma:

Por factorización

Para resolver una ecuación cuadrática por factorización, se debe recordar la propiedad:

> Si $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0$ o $b = 0$
> Se puede aplicar de la siguiente forma:
> Si $(x + a)(x + b) = 0$, entonces
> $x + a = 0$; $x + b = 0$
>
> (Swokowski y Cole, 2002)

Ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo orden por factorización

Resuelve las ecuaciones cuadráticas por factorización:	
a. $2x(x - 3) = 0$	
Solución: $2x(x - 3) = 0$ $2x = 0$; $x - 3 = 0$ $x = 0$; $x = 3$ Sol: $\{0,3\}$	Iguala cada factor a cero aplicando la propiedad del producto cero Despeja x Escribe la solución
b. $x^2 + 2x = 48$	
$x^2 + 2x = 48$ $x^2 + 2x - 48 = 0$ $(x + 8)(x - 6) = 0$ $x + 8 = 0$; $x - 6 = 0$ $x = -8$; $x = 6$ Sol: $\{-8,6\}$	Iguala a cero Factoriza Aplica la propiedad del producto cero Despeja x Escribe la solución
c. $3x^2 + 5x - 2 = 0$	
$3x^2 + 5x - 2 = 0$ $(3x - 1)(x + 2) = 0$ $3x - 1 = 0$; $x + 2 = 0$ $x = \frac{1}{3}$; $x = -2$ Sol: $\left\{\frac{1}{3}, -2\right\}$	Factoriza Aplica la propiedad del producto cero Despeja x Escribe la solución

Recuerda que:

$$x^2 = a \ (a > 0)$$

entonces

$$x = \sqrt{a} \text{ o } x = -\sqrt{a}$$

Del mismo modo

$$(x+b)^2 = a$$

entonces

$$(x+b) = \sqrt{a} \ \text{ o } \ (x+b) = -\sqrt{a}$$

Errores y correcciones frecuentes

Error: $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a} = \sqrt{b}$

Corrección: $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a}$

⟶ no se puede simplificar "a"

Error: $\dfrac{a+c\sqrt{b}}{c} = a + \sqrt{b}$

Corrección: $\dfrac{a+c\sqrt{b}}{c}$

⟶ no se puede simplificar "c"

d. Resuelve la ecuación cuadrática por factorización tomando en cuenta las restricciones:

$$\frac{3x}{2x+1} - \frac{x+5}{x+1} = \frac{x-19}{2x^2+3x+1}$$

Solución:

$$\frac{3x}{2x+1} - \frac{x+5}{x+1} = \frac{x-19}{2x^2+3x+1}$$

Calcula el mcm y excluye los valores que le hacen cero al denominador: $x \neq -\dfrac{1}{2}$; $x \neq -1$

$$\frac{3x}{2x+1} - \frac{x+5}{x+1} = \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)}$$

$$\frac{3x(x+1)-(x+5)(2x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)}$$

$$\frac{3x^2+3x-2x^2-x-10x-5}{(2x+1)(x+1)} = \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)}$$

$x^2 - 8x - 5 = x - 19$
$x^2 - 9x + 14 = 0$
$(x-7)(x-2) = 0$
$x - 7 = 0$; $x - 2 = 0$
$x = 7$; $x = 2$
Sol: $\{2,7\}$

Por la fórmula de la ecuación cuadrática

Al resolver ecuaciones cuadráticas en algunos casos no se puede descomponer en factores, en este caso se utiliza la fórmula de la ecuación cuadrática.

Conocemos: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Restamos c a ambos lados de la igualdad

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividimos a ambos lados por el coeficiente de x^2

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos el trinomio cuadrado en el primer miembro sumando $\dfrac{b^2}{4a^2}$ a ambos miembros de la ecuación.

Trabajo en clase con el docente.
Postula un ejemplo sobre el tema y resuélvelo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación y resuelve el lado derecho.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

Extrae la raíz cuadrada

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

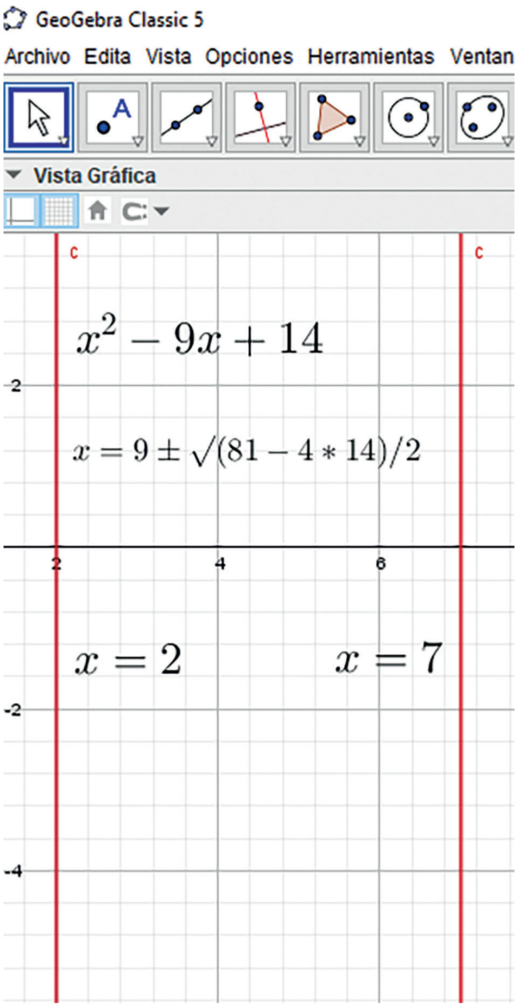
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene la fórmula de la ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Weidig, Matemáticas para todos, 2016)

Ilustración 36
Solución de una ecuación de segundo orden



Fuente: Geogebra 2017

Tomando en un caso el signo más y en el otro el signo menos, se obtiene las dos raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Ejemplo de resolución de ecuaciones de segundo orden utilizando la fórmula general:

Resuelve la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$\frac{3x}{2x+1} - \frac{x+5}{x+1} = \frac{x-19}{2x^2+3x+1}$$

Solución:

$$\frac{3x}{2x+1} - \frac{x+5}{x+1} = \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)}$$

Calcula el mcm y excluye los valores que le hacen cero al denominador

$$x \neq -\frac{1}{2} \ ; x \neq -1$$

$$\frac{3x(x+1) - (x+5)(2x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)}$$

$$\frac{3x^2 + 3x - 2x^2 - x - 10x - 5}{(2x+1)(x+1)} = \frac{x-19}{(2x+1)(x+1)}$$

$x^2 - 8x - 5 = x - 19$
$x^2 - 9x + 14 = 0$

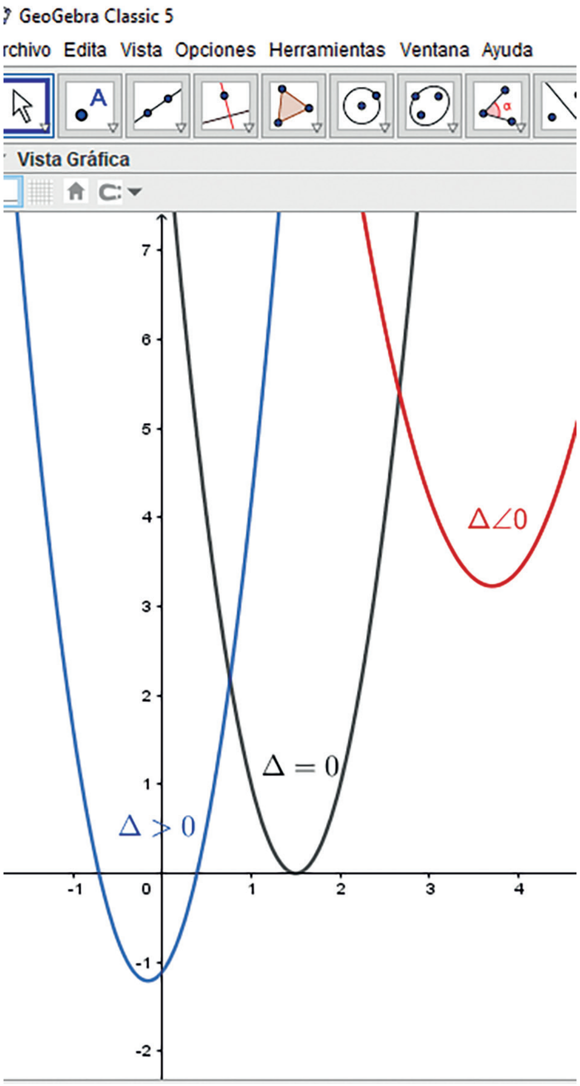
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(14)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} \ ; x = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{9+5}{2} ; x = \frac{9-5}{2}$$

$x = 7 \ ; x = 2$
Sol: $\{2,7\}$

Ilustración 37
Gráficas de funciones de segundo orden con el uso del discriminante



Fuente: Geogebra 2017

Discriminante

Las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes se obtienen aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La naturaleza de las raíces de la ecuación depende de la cantidad subradical $b^2 - 4ac$ llamada discriminante que se simboliza por Δ, el cual permite saber el número de soluciones sin necesidad de encontrarlas.

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$,

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces son reales y distintas
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales iguales
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

(Branett, 2014)

Trabajo en clase con el docente.
Postula un ejemplo sobre el tema y resuélvelo:

Ejemplos del uso del discriminante

Utiliza el discriminante para determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones	
a. $4x^2 - 12x + 9 = 0$	
Solución: $4x^2 - 12x + 9 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9)$ $\Delta = 144 - 144$; $\Delta = 0$ La ecuación tiene dos raíces iguales	Los coeficientes de la ecuación cuadrática son $a = 4, b = -12, c = 9$ Calcula el discriminante $\Delta = 0$, dos raíces iguales
b. $2x^2 - 3(x - 1) = -2x - 3$	
Solución: $2x^2 - 3(x - 1) = -2x + 3$ $2x^2 - 3x - 3 = -2x + 3$ $2x^2 - x - 6 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-6)$ $\Delta = 1 + 24$; $\Delta = 25$ La ecuación tiene dos raíces reales distintas	Aplica la propiedad distributiva Suma $2x$ y reste 3 a ambos lados de la ecuación Calcula el discriminante $\Delta > 0$, dos raíces reales
c. Determina el valor de k en la ecuación $x^2 - 2kx - 8k = 0$, de modo que sus raíces sean iguales	
Solución: $b^2 - 4ac = 0$ $(-2k)^2 - 4(1)(-8k) = 0$ $4k^2 + 32k = 0$ $4k(k + 8) = 0$ $k_1 = 0$; $k_2 = -8$ La ecuación tiene dos raíces iguales si: $k_1 = 0$; $k_2 = --8$	Para que la ecuación tenga sus raíces iguales, se debe considerar que $\Delta = 0$

Dato Curioso

Franciscus Vieta
(1540 - 1603)

Era un político exitoso cuando se dedicó a las matemáticas ya tarde en su vida.

Se convirtió en unos de los matemáticos franceses más famosos del siglo XVI.

Vieta introdujo un nuevo nivel de abstracción en el álgebra por medio del uso de letras para representar cantidades conocidas de una ecuación.

Antes de la época de Vieta, cada una de las ecuaciones se tenía que resolver por separado.

Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$
$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

Se tenían que resolver por separado completando el cuadrado. La idea de Vieta era considerar todas las ecuaciones cuadráticas de una vez al escribir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b y c son cantidades conocidas. Por consiguiente, él hizo posible escribir una fórmula, en este caso la fórmula cuadrática, con la que se pueden resolver todas las ecuaciones cuadráticas en unos pocos pasos.

El genio matemático Vieta demostró lo valioso que era durante la guerra entre Francia y España, ya que para comunicarse con las tropas, los españoles utilizaban un complicado código, que Vieta descifró. El rey de España, Felipe II ajeno a los logros de Vieta, protestó ante el Papa, y afirmó que los franceses recurrían a la hechicería para leer sus mensajes.

(Stewart, 2007)

Relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática

$$\text{Si } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0,$ entonces se cumple que:

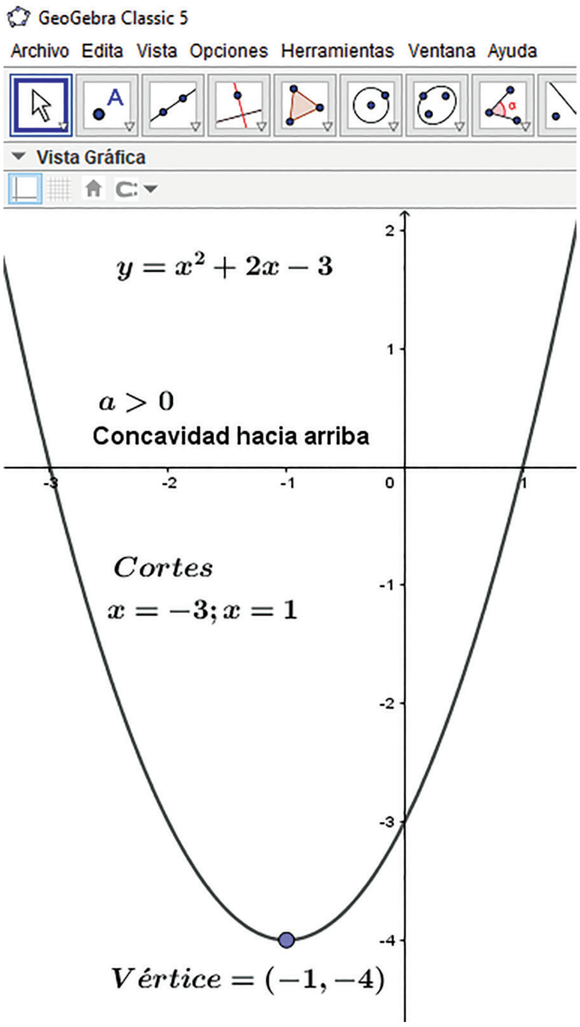
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo de la relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática:

<table>
<tr><td colspan="2">Empleando el teorema de Vieta verifica si el conjunto solución planteado es correcto</td></tr>
<tr><td colspan="2">a. $x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad Sol = \{-3,2\}$</td></tr>
<tr><td>Solución:
$-3 + 2 = -5$
$-1 \neq -5$
Luego, $\{-3,2\}$, no es el conjunto solución de $x^2 + 5x + 6 = 0$</td><td>$x1 + x2 = -\frac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">b. $2x^2 + 3x - 2 = 0$ $\quad Sol = \{-2, \frac{1}{2}\}$</td></tr>
<tr><td>Solución:
$-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$
$-\frac{4}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$
$-2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$
Luego, $\{-2, \frac{1}{2}\}$, es el conjunto solución de $2x^2 + 3x - 2 = 0$</td><td>$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráficamente
Para determinar las raíces de una ecuación cuadrática, cuya gráfica es una parábola, se utiliza el vértice y la tabla de valores.

Para una función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, las coordenadas del vértice son:
$V\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$</td></tr>
</table>

Ilustración 38
Parámetros de construcción a partir de una ecuación de segundo orden.



Fuente: Geogebra 2017

Ejemplo de resolución de ecuación de segundo orden por el método gráfico.

Determine los cortes con el eje x, calculando las coordenadas del vértice y elaborando una tabla de valores de $y = x^2 + 2x - 3$

Solución:

$V\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$

$Xv = -\frac{2}{2(1)} = -1$

$Yv = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3$

$Yv = -4,l$

luego el vértice es: V(-1;-4)

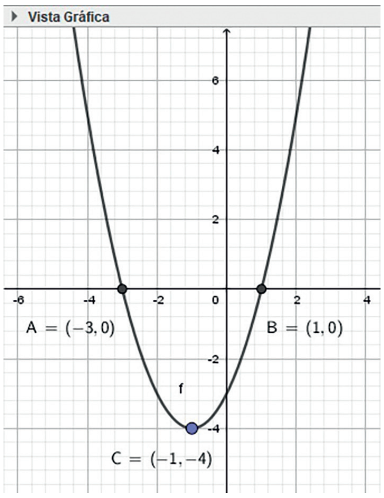
Calcula el vértice de la parábola $y = x^2+2x-3$, donde: $a=1$, $b=2$, $c=-3$

Se realiza una tabla de valores que sirve como puntos de apoyo a la gráfica

x	y
-3	0
-2	-3
0	-3
1	0

Calcula puntos con la tabla de valores utilizando Xv

Ubicamos los puntos y trazamos la gráfica



La solución es: $Sol = \{-3;1\}$

Escriba los cortes con el eje x lo más aproximado posible: $x_1=-3$; $x_2=1$

Ejercicios 3.4:
"Ecuaciones de segundo grado"

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $13x^2 = 2x$
b. $x^2 - 8x + 15 = 0$
c. $x^2 - x - 30 = 0$
d. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
e. $6x^2 - 5x + 1 = 0$
f. $13x^2 = 2x$
g. $(2x + 6)(2x - 6) = (2x + 9)(3x - 4)$
h. $(x + 13)^2 = (x + 12)^2 + (x + 5)^2$

2. Primero escribe el valor o valores para los cuales el denominador es cero. Luego resuelve la ecuación:

a. $\frac{9}{x} + 2 = \frac{1}{2x} + \frac{13}{4}$

b. $\frac{x}{2} + \frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3} - 2$

c. $\frac{5x-3}{x} = \frac{7-x}{x+2}$

d. $\frac{x+1}{x+3} + \frac{x+5}{x-2} = \frac{7(2x+1)}{x^2+x-6}$

e. $\frac{2}{2x-3} + \frac{2+x}{2+3x+x^2} = \frac{3}{2x^2-x-3}$

3. Resuelve la ecuación utilizando la fórmula:

a. $(4x - 1)(2x + 2) = 12$

b. $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

c. $\frac{3x+4}{3} + \frac{18}{2-3x} = 2$

d. $\frac{3x^2+25}{x^2-25} + \frac{5-x}{5+x} = \frac{2x}{x-5}$

e. $\sqrt{x-2} + 14 = x$

f. $x + 2 = 2\sqrt{4x-7}$

4. Calcula el discriminante e indicar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2 - 3x + 5 = 0$
b. $x^2 - 8x + 36 = 0$
c. $x^2 - 6x + 30 = 0$
d. $x^2 - 10x + 25 = 0$
e. $3x^2 - 5x + 2 = 0$
f. $2x^2 - x - 45 = 0$
g. $x^2 + x + 2 = 0$
h. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

5. Determina el valor de **k** en cada una de las siguientes ecuaciones de modo que sus raíces sean iguales:

a. $kx^2 - 24x + 5 = 0$
b. $x^2 - kx - 2k^2 = 0$
c. $4x^2 - (k - 6)x + 21 = 0$
d. Determina el valor de **k** en la ecuación $6x^2 - kx + 15 = 0$, sabiendo que la suma de sus raíces es 2.

6. Verifica empleando el Teorema de Vieta si el conjunto solución dado viene a ser el conjunto solución de la ecuación cuadrática:

a. $x^2 + 7x + 12 = 0; \{3,4\}$
b. $x^2 - 3x - 10 = 0; \{2, -5\}$
c. $x^2 - 5x - 24 = 0; \{-3,8\}$
d. $x^2 - 8x + 16 = 0; \{4,4\}$
e. $t^2 + 3t + 2 = 0; \{-2,1\}$
f. $p^2 + 12p + 36 = 0; \{-6, -6\}$

7. Determina los interceptos con **x**, calculando las coordenadas del vértice y elaborando una tabla de valores de las funciones y comprueba su gráfica con el uso del programa **geogebra en línea:**

a. $y = x^2 - 2x - 3$
b. $y = 2x^2 + 2x - 3$
c. $y = -2x^2 - 12x - 15$
d. $y = -2x^2 + 8x - 7$
e. $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$
f. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 6$

3.5 Aplicaciones en la vida cotidiana de ecuaciones

Algunos casos de la vida cotidiana se pueden operar utilizando un proceso lógico para resolver problemas, a continuación, se muestra el proceso mencionado mediante un ejemplo:

Ejemplo de aplicación de ecuaciones en la vida cotidiana:

Un químico cobra $ 20 por una hora de sus servicios y $ 8 por hora por su asistente. Por un trabajo presentó una cuenta de $ 1 040. Si el químico trabajó 10 horas más que su asistente; ¿cuántas horas trabajó cada uno?

Releer el problema	
¿Cuáles son los datos?	Químico: 20 dólares la hora Asistente: 8 dólares la hora Costo del trabajo: 1 040 dólares
¿Qué se busca?	Número de horas que trabaja el asistente: x
Introducción de la variable	Supuesto
¿Cómo son los resultados para distintos valores de la variable	Asistente — Químico Si x = 20 horas — $(x + 10) = 30$ horas Costo: $8·20 + 20·(20+10)= 760$ Si x = 28 horas — $(x + 10) = 38$ horas Costo: $8·20 + 20·(28 + 10) = 984$
Plantear la ecuación	$8·x + 20·(x + 10) = 1\ 040$
Resolver la ecuación	$8x + 20x + 200 = 1\ 040$ $28x = 840$ $x = 30$; luego $x + 10 = 40$
Contestar Poner la respuesta	El químico trabajó 40 horas y el asistente 30 horas
Comprobar la solución	Si $x = 30$ $8·x + 20·(x + 10) = 1\ 040$ $8·30 + 20·(30 + 10) = 1\ 040$ $240 + 600 + 200 = 1\ 040$ $1.040 = 1\ 040$ (verdad)

Es necesario realizar un análisis del resultado obtenido para poder razonar sobre la coherencia de este frente al problema.

Ejercicios 3.5:
"Aplicaciones de ecuaciones"

1. Resuelve los siguientes problemas, utilizando ecuaciones de primer grado:

   a. Una compañía que renta automóviles cobra $\text{dólares } 30$ al día más 15 centavos de dólar por kilómetro al rentar un automóvil. Elena renta un automóvil por dos días y su cuenta es de $\text{dólares } 108$. ¿Cuántos kilómetros recorrió?

   b. El perímetro de un jardín rectangular es de 58m. Si el lado mayor mide 11m. más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?

   c. Un mecánico cobra $\text{dólares } 6$ por hora y su asistente $\text{dólares } 4$ por hora. En una reparación la cuenta fue de $\text{dólares } 190,$ donde $\text{dólares } 92$ son de mano de obra y 98 por repuestos. Si el asistente trabajó dos horas menos que el mecánico, ¿cuántas horas trabajó cada uno?

   d. Una botella y su corcho cuestan $4{,}5$ dólares y la botella $3{,}9$ dólares más que el corcho. ¿Cuánto cuesta la botella y cuanto el corcho?

   e. Uno de los ángulos de un triángulo mide $52°$ y la diferencia de los otros dos es $88°$.¿Cuánto mide cada uno de esos ángulos?

   f. Por un par de zapatos se paga el triple que por una corbata, gastando en total por los dos artículos $\text{dólares } 60.$ Calcular el costo de cada uno. $\text{R: dólares } 15$ y $\text{dólares } 45$

   g. Se cambian $\text{dólares } 100$ en billetes de $\text{dólares } 1$ y $\text{dólares } 5$, recibiendo 24 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase se obtienen? $\text{R: } 5$ y 9

   h. El tiempo máximo que debes tardarte en resolver este problema, se descompone así: $\frac{1}{25}$ del total en leerlo; $\frac{1}{4}$ en datos y formulación; $\frac{41}{100}$ en resolverlo; y minuto y medio en su comprobación. ¿Qué tiempo necesitas?

   i. Luis hereda $100\,000$ dólares y los invierte dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga el 6% y el otro paga $4\frac{1}{2}\%$ de interés anual. Si el interés total de Luis es $5\,025$ dólares por año, ¿cuánto dinero está invirtiendo en cada tasa?

   j. Un cartel tiene una superficie impresa de 100 por 140cm y una franja de ancho uniforme alrededor de los cuatro lados. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja en blanco y cuáles son las dimensiones del cartel?

2. Resuelve los siguientes problemas, utilizando ecuaciones de segundo grado:

   a. La suma de dos números es 5 y su producto es $-84.$ Halla dichos números.

   b. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

   c. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

   d. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números $3, 4$ y $5.$ Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es $24\text{ m}^2.$

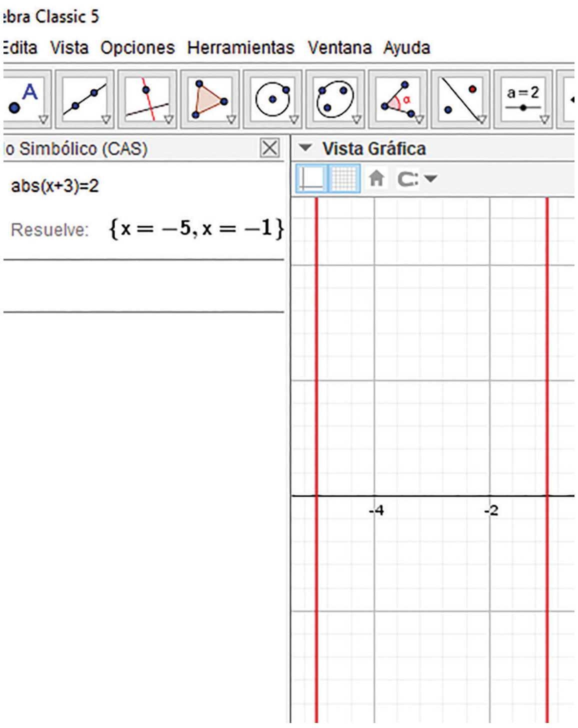
   e. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es $540\text{ m}^2.$

   f. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente

   g. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\frac{26}{5}$

   h. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

Ilustración 39
Gráfica de los valores resultantes en una ecuación de valor absoluto.



Fuente: Geogebra 2017

Errores y correcciones frecuentes

$Si\ |x - a| = b$

Error: $|x| - a = b$

Corrección: $|x - a| \neq |x| - a$

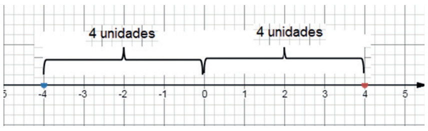
No se puede realizar apertura

En la recta real, a la distancia que existe desde el cero hasta un número x se le conoce con el nombre de valor absoluto de **x** y se escribe como **|x|.**

3.6 Ecuaciones con Valor Absoluto

En la recta real, a la distancia que existe desde el cero hasta un número x se le conoce con el nombre de valor absoluto de x y se escribe como **|x|.**
Geométricamente, el valor absoluto de un número real es el número que se obtiene cuando no se toma en cuenta su signo.

(Haeussler P. y., 2015)



Definición

El valor absoluto de un número real **x**, escrito como $|x|$, se define mediante

$$|x| = \begin{cases} x\ \boldsymbol{si}\ x \geq \mathbf{0} \\ -x\ \boldsymbol{si}\ x < \mathbf{0} \end{cases}$$

(Haeussler, 2015)

Observación:
$|x| = a \leftrightarrow x = a\ ;\ x = -a$

Ejemplo de ecuaciones con valor absoluto:

Resuelve la ecuación con valor absoluto:

a. $\left|1 - \frac{5}{4}x\right| = 6$

$$1 - \frac{5}{4}x = 6 \quad o \quad 1 - \frac{5}{4}x = -6$$

$$\frac{4 - 5x}{4} = \frac{24}{4} \quad o \quad \frac{4 - 5x}{4} = \frac{-24}{4}$$

$$-5x = 20 \quad o \quad -5x = -28$$

$$x = -4 \quad o \quad x = \frac{28}{5}$$

$$\text{Sol: } \left\{-4\ ;\ \frac{28}{5}\right\}$$

3.7 Ecuaciones exponenciales

Una **ecuación exponencial** es una igualdad en la cual la variable se encuentra como exponente. Por ejemplo: $5^{2x} = 125$

(Stewart R. y., 2009)

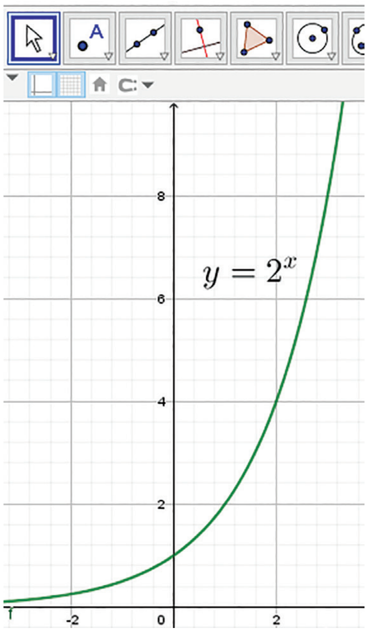
Para resolver una ecuación exponencial se aplica las propiedades de las potencias

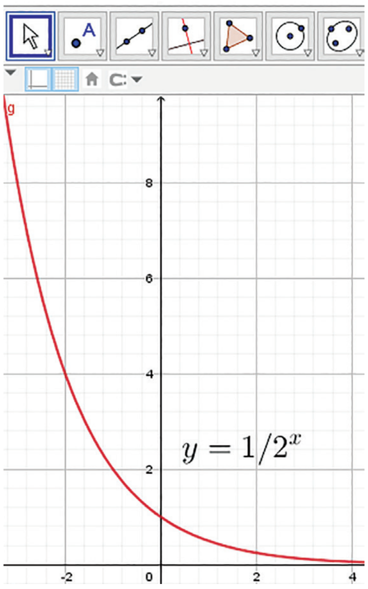
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \qquad a^{m-n} = a^m \div a^n \qquad \text{Si } a^x = a^y \rightarrow x = y$

Dato Curioso

Las funciones exponenciales son apropiadas para modelar el crecimiento poblacional para los seres vivos, desde bacterias hasta elefantes. Para entender cómo crece una población, considere el caso de una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora se tendrían dos baterias, después de dos horas **2²** o **4** bacterias, después de tres horas **23** u **8** bacterias, etc. Después de **x** horas se tendrían **2x** bacterias.

Ilustración 40
Gráfica de funciones exponenciales.





Fuente: Geogebra 2017

Para la resolución de ecuaciones exponenciales, se presentan los siguientes métodos:

Por reducción a igual base

$$2^{2x+5} = 16$$
$$2^{2x+5} = 2^4$$
$$2x + 5 = 4$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$4^{x^2+x-30} = 1$$
$$4^{x^2+x-30} = 4^0$$
$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$(x+6)(x-5) = 0$$
$$x_1 = -6\ ;\ x_2 = 5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3X-3=}\left(\frac{27}{8}\right)^{X-7}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3X-3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{X-7}$$
$$3x - 3 = ;\ -3x + 21$$
$$6x = 24$$
$$x = 4$$

Por factorización y cambio de variable

$$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$$
$$2^x \cdot 2^1 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28$$
$$2^x\left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28$$
$$2^x\left(\frac{7}{2}\right) = 28$$
$$2^x = 28\left(\frac{2}{7}\right)$$
$$2^x = 8;$$
$$2^x = 2^3;$$
$$x = 3$$

$$9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$$
$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 81 = 0$$
$$3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0$$
$$3^x = t$$
$$t^2 - 18t + 81 = 0$$
$$(t-9)(t-9) = 0$$
$$t_1 = t_2 = 9$$
$$3^x = 3^2$$
$$x = 2$$

3.8 Ecuaciones logarítmicas

Logaritmos

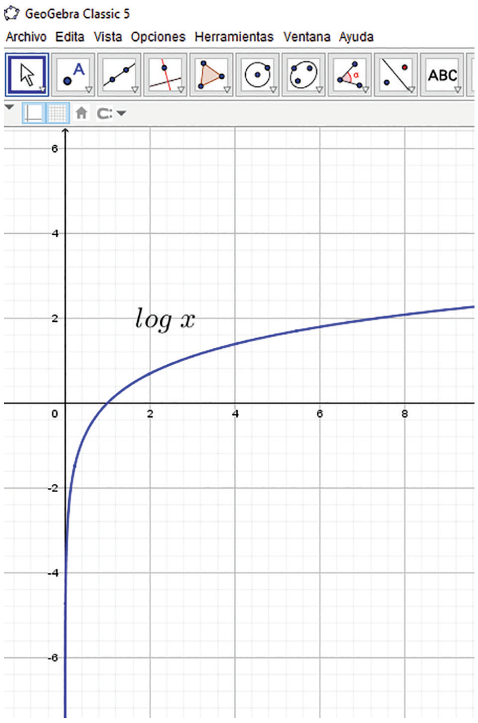
El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

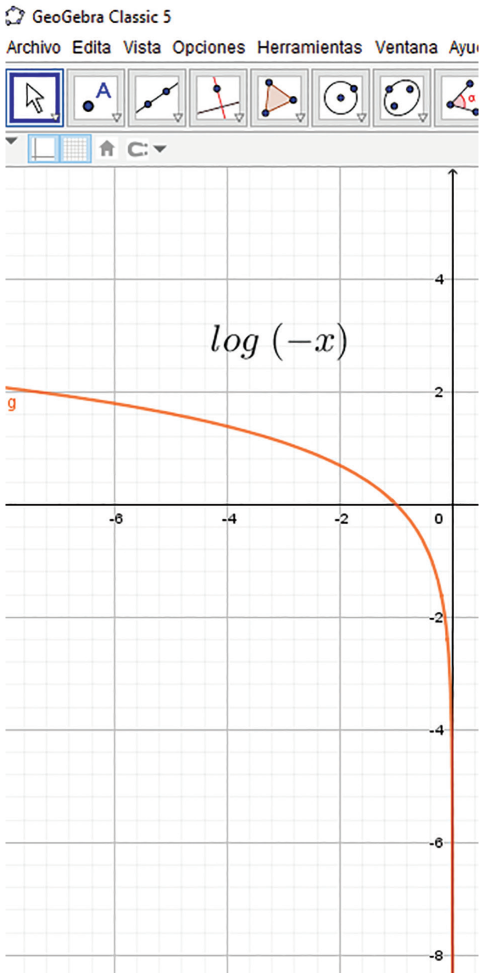
$$\log_a x = y \rightarrow a^y = x$$

Se lee "logaritmo de x en base a es igual a y". Debe cumplir la condición que $a \neq 1$.

Cuando se intercambia la notación logaritmo $\log_a x = y$ y la exponencial $a^y = x$, resulta observar que para ambas formas de escritura la **base** es la misma.

Ilustración 41
Gráfica de funciones logarítmicas.





Fuente: Geogebra 2017

Ejemplo:

Notación	
Logarítmica	Exponencial
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
$\log_3 \frac{1}{27} = -3$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$
$\log_a P = W$	$a^w = P$

Propiedades de los logaritmos

- No existe el logaritmo de un número con base negativa: $\log_{-a} x$; *no existe*
- No existe el logaritmo de un número negativo: $\log_a(-x)$; *no existe*
- No existe el logaritmo de cero: $\log_a 0$; *no existe*
- El logaritmo de 1 es cero: $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo de **a** en base **a** es uno: $\log_a a = 1$
- El logaritmo en base **a** de una potencia en base **a** es igual al exponente: $\log_a a^x = x$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$
- $a^{\log_a x} = x$

Ejemplo:

1. Expanda el siguiente logaritmo utilizando las propiedades.

$$\log_a \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^5 \cdot r}} = \log_a \left(\frac{p^2}{q^5 \cdot r}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\log_a\left(\frac{p^2}{q^5 . r}\right) = \frac{1}{3}(\log_a p^2 - \log_a q^5 - \log_a r)$$

$$= \frac{2}{3}\log_a p - \frac{5}{3}\log_a{}^{q} - \frac{1}{3}\log_a r$$

2. Escriba la expresión como un sólo logaritmo

$$\frac{1}{3}\log_2(x - 1) - \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\log_2(x-1)^{\frac{1}{3}} - \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt[3]{x-1} - 1 - \log_2 \sqrt{x}$$

$$= \log_2\left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}}\right)$$

Dato Curioso

John Napier
(1550 - 1617)

Fue un terrateniente escocés cuyo pasatiempo eran las matemáticas. Lo conocemos hoy en día debido a su invento: los logaritmos, que publicó 1614 bajo el título Description of the Marvelous Rule of Logarithms (Una descripción de la regla maravillosa los de logaritmos). En la época de Napier, los logaritmos se utilizaban exclusivamente para simplificar cálculos complicados. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes se escribían como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &4532 \; x \; 57788 \\ &\approx 10^{3.65629} \; x \; 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261\,872\,564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (simplemente se suman sus exponentes). Napier produjo tablas extensas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde la llegada de las calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este porpósito. Sin embargo, las funciones logarítmicas han encontrado muchas aplicaciones, por ejemplo, la respuesta humana al sonido y a la intensidad lumínica es logarítmica.

Napier escribió sobre muchos temas. Uno de sus trabajos más pintorescos es su libro A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John, en el que predice que el mundo terminaría en el año 1700.

(Stewart, 2007)

Ecuaciones logarítmicas:

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo. Por ejemplo: $\log_2(x-1) = 5$

(Stewart R. y., Precálculo.
Matemáticas para el cálculo, 2009)

Para resolver ecuaciones logarítmicas se tiene en cuenta:

$$\log_a x = \log_a y \rightarrow x = y$$
$$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$$

Para la resolución de ecuaciones logarítmicas, se presentan los siguientes métodos:

Por propiedad
$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$

$\log(x-2) - \log(x-11) = 1$

$\log_{10}\left[\dfrac{x-2}{x-11}\right] = 1$

$\left[\dfrac{x-2}{x-11}\right] = 10^1$

$x - 2 = 10x - 110$

$108 = 9x$

$x = 12$

$\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = 3$

$\log_3 [(x+2)(x-4)] = 3^3$

$[(x+2)(x-4)] = 3^3$

$x^2 - 2x - 8 = 27$

$x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x-7)(x+5) = 0$

$x_1 = 7$; $x_2 = -5$ (no es solución)

Por propiedad
$\log_a x = \log_a y \rightarrow x = y$

$\log_5 2 + \log_5(11 - x^2) = 2\log_5(5-x)$

$\log_5 [2(11-x^2)] = \log_5(5-x)^2$

$[2(11-x^2)] = (5-x)^2$

$22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$x_1 = 3$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$

$\log_2(2x+7) - \log_2(x-1) = \log_2 5$

$\log_2\left[\dfrac{2x+7}{x-1}\right] = \log_2 5$

$\left[\dfrac{2x+7}{x-1}\right] = 5$

$2x + 7 = 5x - 5$

$x = 4$

Ejercicios 3.6:
“Ecuaciones con valor absoluto”

1. Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto

   a. $|4x-1|=5$

   b. $\left|2-\frac{x}{3}\right|=2$

   c. $\left|\frac{x+1}{x-5}\right|=1$

   d. $\left|\frac{2x-3}{1-x}\right|=2$

   e. $\left|\frac{3x}{4}-1\right|=4$

   f. $\left|\frac{4-x}{3x}\right|=3$

   g. $\left|\frac{x^2}{x-1}\right|=4$

Ejercicios 3.7:
“Ecuaciones exponenciales”

1. Determina la solución de las ecuaciones exponenciales.

   a. $\left(\frac{1}{7}\right)^{X}=343$

   b. $64^{\frac{1}{X}}=32$

   c. $10^{x2-5x+6}=1$

   d. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}X-1}=\left(\frac{125}{64}\right)^{X-0,5}$

   e. $\sqrt[4]{a^{13x+5}}=a^{2x-5}$

   f. $2^{x+3}+2^{x}=72$

   g. $2^{x+1}+2^{x-1}=40$

   h. $5^{x-2}+5^{x-1}=\frac{30}{5}$

   i. $3^{2x}+2\cdot 3^{x}-15=0$

   j. $2^{2x}-5\cdot 2^{x}+4=0$

   k. $4^{x}-3\cdot 2^{x+1}=-8$

   l. $3^{1-x}-3^{x}=2$

   m. $9^{x+1}+3=28\cdot 3^{x}$

   n. $2^{x}+2^{1-x}-3=0$

   o. $2^{x-1}+\frac{1}{2^{x-3}}=5$

   p. $2-3^{-x}+3^{x+1}=0$

Ejercicios 3.8:
“Ecuaciones logarítmicas”

1. Expresa la ecuación dada en notación exponencial.

   a. $\log_3 81=4$

   b. $\log_{10} 0{,}1=-1$

   c. $\log_4 16=2$

   d. $\ln 3=x$

   e. $\log_2(x+1)=3$

2. Expresa la ecuación dada en notación logarítmica.

   a. $2^5=32$

   b. $49^{\frac{1}{2}}=7$

   c. $10^{-2}=0{,}01$

   d. $e^x=4$

   e. $10^r=s$

3. Expanda los siguientes logaritmos utilizando las propiedade:

   a. $\log(2ab)=$

   b. $\log\frac{3a}{4}=$

   c. $\log\frac{2a^2}{3}=$

   d. $\ln(a^5b^4)=$

   e. $\log\sqrt{ab}=$

   f. $\ln\frac{5a^2b^4\sqrt{c}}{2xy}=$

   g. $\log\left(\frac{a\sqrt{c}}{2}\right)^4$

   h. $\log(7ab^3\ \sqrt{5c^2})$

   i. $\log_2\left(\frac{2xy}{\sqrt{8xy}}\right)^3=$

   j. $\ln\sqrt{\frac{10a}{b^5}}$

4. Escriba cada expresión como un sólo logaritmo:

a. $\log a + \log b =$

b. $\log x - \log y =$

c. $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y =$

d. $\log a - \log x - \log y =$

e. $\log p + \log q - \log r - \log s =$

f. $\log 2 + \log 3 + \log 4 =$

g. $\log(a+b) + \log(a-b) =$

h. $\log(x^2 - 5x + 4) - \log(x - 4) =$

i. $\log(a^2 - 25) - \log(a - 5) =$

j. $\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{4}\log c - \frac{1}{3}\log d =$

k. $\frac{3}{5}\log a^2 + \frac{2}{3}\log p^5 - \frac{1}{5}\log q^4 =$

5. Determina el valor de **x** en las siguientes ecuaciones:

a. $\log_3 81 = x$

b. $\log_5 0{,}2 = x$

c. $\log_2 x = -3$

d. $\log_4 64 = \frac{2x-1}{3}$

e. $\log_2 16 = \frac{x^2}{2}$

f. $x + 2 = 10^{\log 5}$

g. $x = 10^{4\log 2}$

h. $\log_6[4(x^2+5)] = 2$

i. $\log_{2x+3}(81) = 2$

j. $\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} = 2$

k. $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$

l. $2 + \log_4(3x-2) = \log_4(x+1)$

m. $\log(5x+4) - \log 2 = \frac{1}{2}\log(x+4)$

6. Grafica utilizando el programa geogebra en línea las siguientes funciones y analiza cada una de ellas:

a. $y = e^x$

b. $y = 10^x$

c. $y = e^{-x}$

d. $y = 10^{-x}$

e. $y = \log x$

f. $y = \ln x$

Aplicaciones

Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de habitat y suministros de alimento. En tales condiciones la población sigue un modelo de crecimiento logístico

$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

Donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces, en un pequeño estanque; $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en tiempo $t = 0$.

a. ¿Cuántos peces se colocaron originalmente en el estanque?

b. Calcula la población después de 10, 20 y 30 años.

c. Grafica la función $P(t)$ y responda: ¿A qué valor tiende la población cuando $t \to \infty$?

Excursiones matemáticas

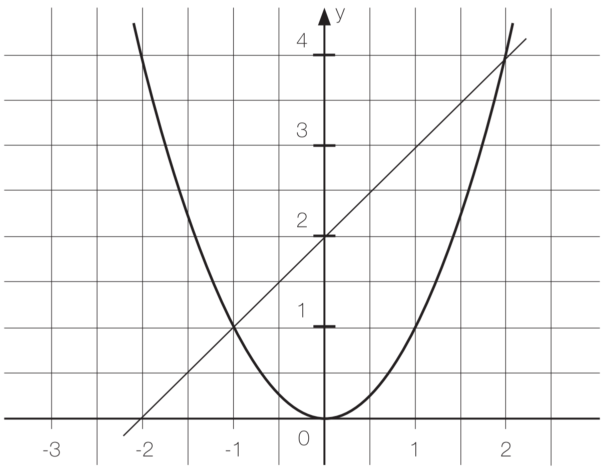
1. Observa la figura que se presenta:

   a. Identifica las coordenadas de los puntos de intersección de las dos funciones

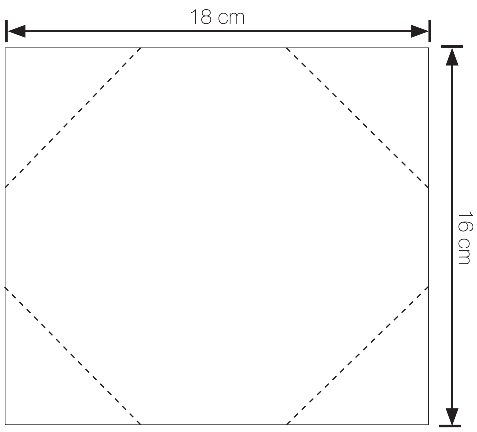
   b. Si $f(x) = x^2$ y $g(x)= x+2$, ¿cuáles son los valores de **x** que al sustituirlos en las funciones, ¿sus valores resultan iguales?

   c. Determina los ceros de la función $f(x) = x^2 - x - 2$

   d. Compara los resultados de a, b y c



2. De una cartulina rectangular se recortan en las esquinas cuatro triángulos isósceles congruentes entre sí. ¿Cuánto tienen que medir los lados de estos triángulos si se desea que el área de la cartulina se reduzca en 25%?



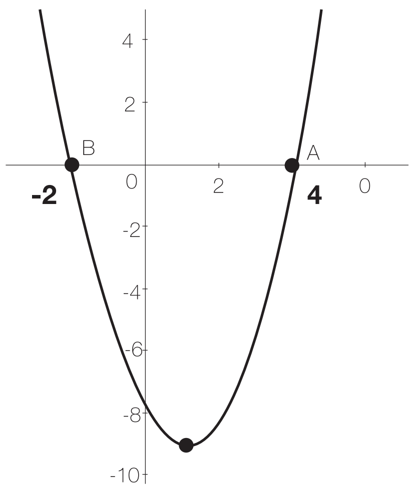
3. Se lanza una pelota hacia arriba que sigue una trayectoria parabólica que cumple con la gráfica de la función cuadrática $h(t) = -12t^2 + 96t + 100$, donde **h** indica la altura (en centímetros) alcanzada por la pelota al cabo de **t** segundos de transcurrido el lanzamiento.

   a. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?

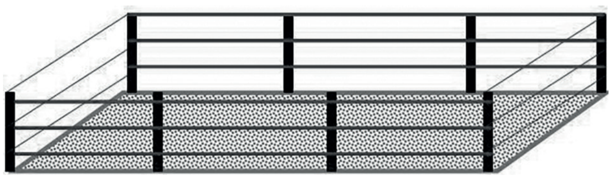
   b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

   c. ¿Qué altura alcanza la pelota transcurridos tres y cinco segundos desde su lanzamiento?

4. Determina la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, que se presenta en la gráfica.



5. Diana desea cercar un terreno en forma rectangular, para lo cual compró 4 000 metros de alambre de púas que debe disponer en cuatro líneas como se muestra en la figura ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?



CAPÍTULO 4 : Desigualdades

Objetivo:

4.1. Conocer y manejar las reglas empleadas en la resolución de desigualdades y usarlas en la determinación del conjunto solución de la inecuación dada.

Contenidos:

En este capítulo el estudiante encontrará los siguientes contenidos:

- Métodos de solución para desigualdades lineales y desigualdades no lineales
- Aplicación de inecuaciones en la vida cotidiana

Las desigualdades se establecen para tomar alternativas de solución, uno de sus usos puede darse en el enfoque de un proceso con resultados óptimos sean estos valores altos o bajos según lo planteado.

Reseña histórica:

Según Scaglia, Bernardis y Nitti (2017) en los inicios de la historia, las desigualdades fueron solo de carácter instrumental y comparativo. Luego, las investigaciones fueron en avance y ahora encontramos revistas cuyo objetivo es el análisis de las desigualdades y sus aplicaciones, el pensar en resolver problemas geométricos relacionados con longitudes o problemas algebraicos que tienen un conjunto de soluciones hace que estas reúnan un marco geométrico, y un marco algebraico que tiene como objeto final un resultado óptimo.

Las autoras manifiestan que el marco geométrico tiene sus inicios en la historia cuando las desigualdades eran usadas como objeto de comparación entre medidas de lugares geométricos como sus áreas, perímetros y volúmenes utilizados para resolver problemas basados en visualización de construcciones geométricas.

Del marco geométrico migran al marco algebraico en donde se posicionan con la simbología algebraica, las resoluciones de las desigualdades están bajo las órdenes de las ecuaciones tomando en cuenta que ahora los resultados son un conjunto de elementos y no uno solo, aquí también son usadas como objeto y herramienta para resolver problemas matemáticos.

Las autoras concluyen que en el área funcional se resuelven problemas de modelización de situaciones que podrán ser combinaciones geométricas, algebraicas de la vida cotidiana, relacionadas con otras ciencias.

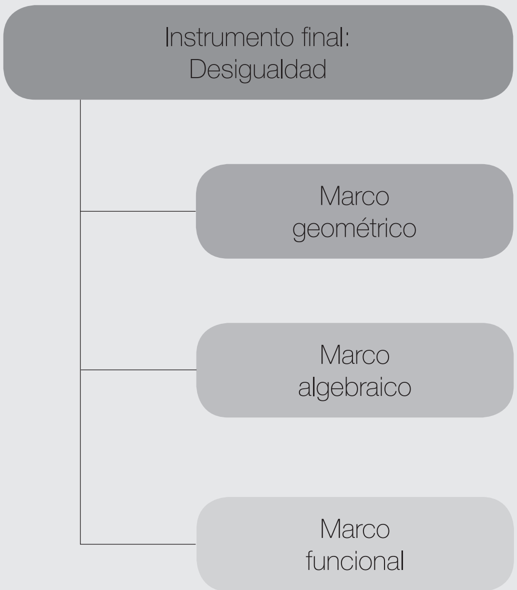
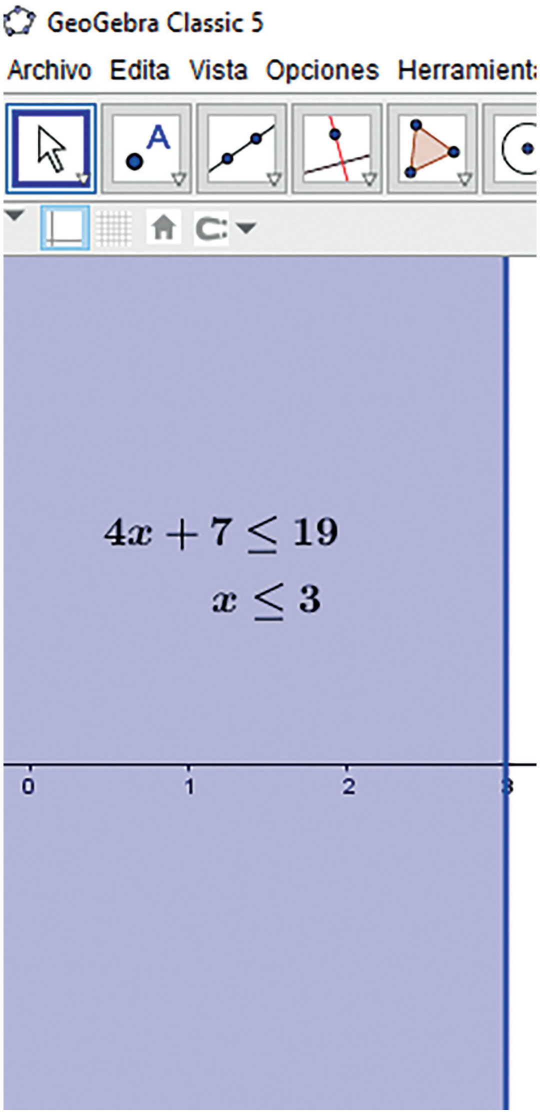


Ilustración 42
Conjunto de valores que son resultado de la desigualdad.



Fuente: Geogebra 2017

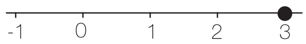
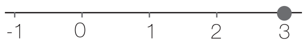
4.1 Desigualdades

Una desigualdad es similar a una ecuación, solo que en lugar de tener un signo de igual, hay uno de los símbolos $<, >, \leq, \geq$. Aquí está un ejemplo:

$$4x + 2 \geq 19$$

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Una desigualdad, por lo general, tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales.

A continuación, se muestra cómo una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

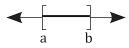
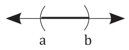
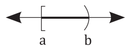
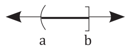
Solución		Gráfica
$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
$4x + 7 \leq 19$	$x \leq 3$	

(Stewart 2009)

A continuación se describen los diferentes tipos de intervalos que podemos encontrar:

Intervalos acotados de números reales

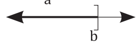
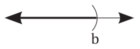
Sean a y b números reales con $a < b$.

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
[a, b]	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
[a, b)	Semi-abierto	$a \leq x < b$	
(a, b]	Semi-abierto	$a < x \leq b$	

Los números **a y b** son los extremos de cada intervalo.

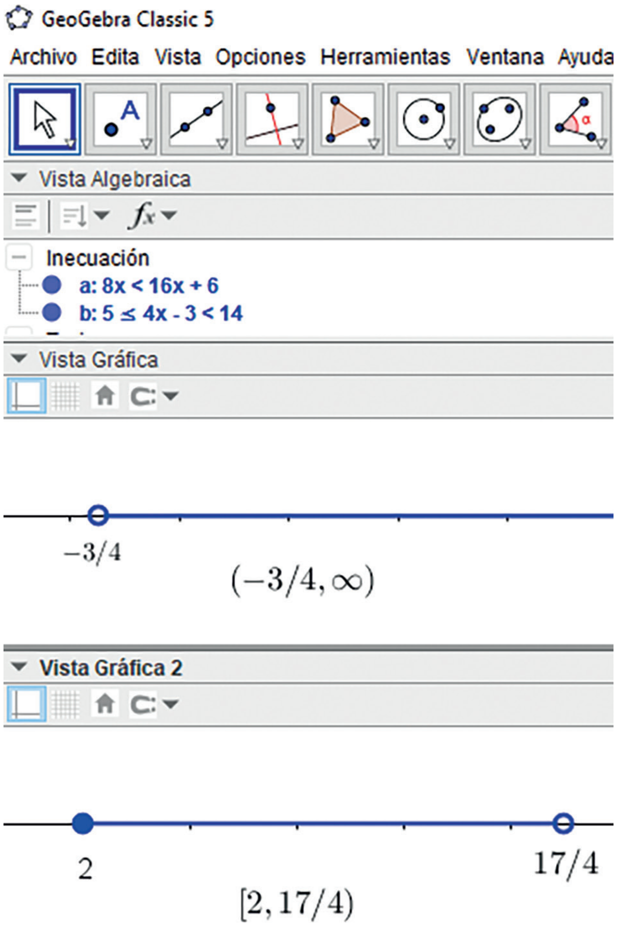
Intervalos no acotados de números reales

Sean a y b números reales.

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
[a, ∞)	Cerrado	$x \geq a$	
(a, ∞)	Abierto	$x > a$	
(-∞, b]	Cerrado	$x \leq b$	
(-∞, b)	Abiero	$x < b$	

Cada uno de estos intervalos tiene exactamente un extremo **a** o **b.**

Ilustración 43
Solución gráfica de una desigualdad



Fuente: Geogebra 2017

Errores y correcciones frecuentes

Error: Cualquier valor es resultado de una desigualdad.

x	$4x + 7 \leq 19$
1	$11 \leq 19$
2	$15 \leq 19$
3	$19 \leq 19$
4	$23 \leq 19$ error
5	$27 \leq 19$ error
6	$31 \leq 19$ error

Corrección: Existe un conjunto de valores solución en toda desigualdad.

Reglas de desigualdades:

1. $A \leq B \iff A + C \leq B + C$
2. $A \leq B \iff A - C \leq B - C$
3. $\text{Si } C > 0, \text{entonces } A \leq B \iff CA \leq CB$
4. $\text{Si } C < 0, \text{entonces } A \leq B \iff CA \geq CB$
5. $\text{Si } A > 0 \text{ y } B > 0 \text{ entonces } A \leq B \iff \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
6. $\text{Si } A \leq B \text{ y } C \leq D \text{ entonces } A + C \leq B + D$

4.2 Desigualdades lineales

Se conoce como desigualdad lineal cuando cada término es constante o múltiplo de la variable.

Ejemplo de desigualdad lineal:

Resuelve la desigualdad $4x < 8x + 3$

$4x < 8x + 3$
$4x - 8x < 8x + 3 - 8x$
$-4x < 3$
$\left(-\frac{3}{4}\right)(-4x) < 3\left(-\frac{1}{4}\right)$
$x > -\frac{3}{4}$

Por tanto el conjunto solución es $\left(-\frac{3}{4}, \infty\right)$

Ejemplo de un par desigualdades simultáneas:

Resuelve las desigualdades $5 \leq 4x - 3 < 14$

El conjunto solución consiste en todos los valores de **x** que cumple la desigualdad.

$$5 \leq 4x - 3 \text{ y } 4x - 3 < 14$$

Por tanto: $5 \leq 4x - 3 < 14$

$5 + 3 \leq 4x - 3 + 3 < 14 + 3$
$8 \leq 4x < 17$
$8\left(\frac{1}{4}\right) \leq 4x\left(\frac{1}{4}\right) < 17\left(\frac{1}{4}\right)$
$2 \leq x < \frac{17}{4}$

El conjunto solución es $\left[2, \frac{17}{4}\right)$

Dato Curioso

Escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en un empaque de película indican que la caja debe conservarse a una temperatura entre $5^{\circ}\mathrm{C}$ y $30^{\circ}\mathrm{C}$; se conoce que la relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) la da ecuación $\mathrm{C} = \frac{5}{9}(\mathrm{F} - 32)$. Al expresar la condición de la caja en términos de desigualdades, tenemos:

$$5 < \mathrm{C} < 30$$

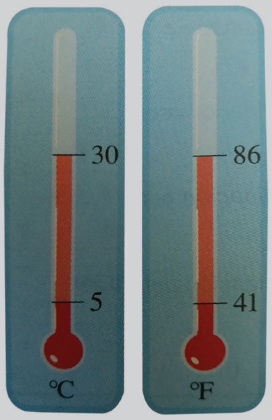
De modo que las temperaturas Fahrenheit cumplen con las desigualdades.

$$5 < \frac{5}{9}(\mathrm{F} - 32) < 30$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)5 < \left(\frac{9}{5}\right)\frac{5}{9}(\mathrm{F} - 32) < \left(\frac{9}{5}\right)30$$

$$9 < (\mathrm{F} - 32) < 54$$

$$41 < \mathrm{F} < 86$$



4.3 Desigualdades no lineales

Criterios para resolver desigualdades no lineales

1. **Pase todos los términos a un miembro.** Si es necesario, vuelva a escribir la desigualdad de modo que todos los términos no cero aparezcan a un lado del signo de la desigualdad.

2. **Factorice.** Factorice el miembro no cero de la desigualdad.

3. **Determine los intervalos.** Calcule los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta numérica en intervalos. Liste los intervalos determinados por medio de estos números.

4. **Elabore un tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para construir una tabla o un diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto o cociente de estos factores.

5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Compruebe si algunos de los extremos de los intervalos cumplen con la desigualdad, lo cual es válido si la desigualdad contiene $\leq o \geq$.

(Stewart 2009)

Ejemplo de desigualdad no lineal polinomial:

Sea $f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} + 3)(\mathrm{x}^2 - 4)(\mathrm{x}^2 - 1)$, determine dónde el polinomio es cero, positivo y negativo

- Factorizando la expresión dada queda expresada de la siguiente forma:

$$f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} + 3)(\mathrm{x} + 2)(\mathrm{x} - 2)(\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} - 1)$$

- Los ceros de la función son: $f(\mathrm{x})=0$

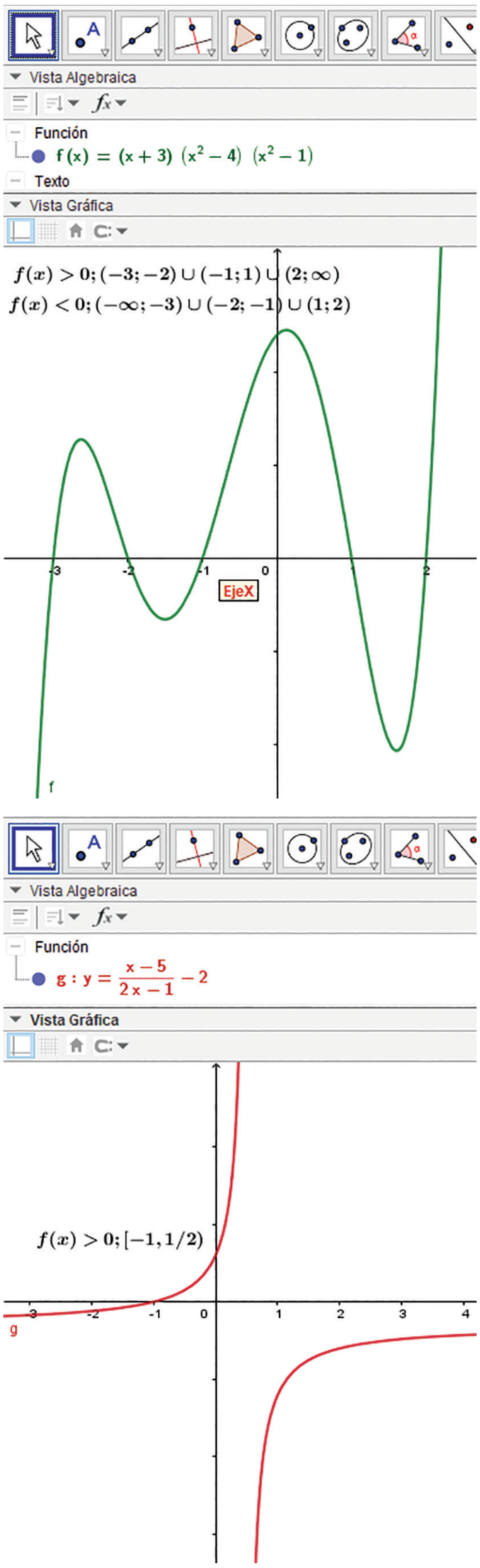
$$\mathrm{x}_1 = -3;\ \mathrm{x}_2 = -2;\ \mathrm{x}_3 = 2;\ \mathrm{x}_4 = -1;\ \mathrm{x}_5 = 1$$

Los intervalos de análisis son:

$(-\infty, -3)$; $(-3, -2)$; $(-2,2)$; $(2, -1)$; $(-1,1)$; $(1,\infty)$

- Para determinar cuando $f(\mathrm{x})>0$ y $f(\mathrm{x})<0$, se elabora el diagrama de signos

Ilustración 44
Solución gráfica de los ejemplos de desigualdades no lineales mostrados.



Fuente: Geogebra 2017

	(-∞, -3)	(-3, -2)	(-2, -1)	(-1, -1)	(1, 2)	(2, ∞)
$x+3$	−	+	+	+	+	+
$x+2$	−	−	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	+
$x+1$	−	−	−	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	+	+
$(x+3)(x^2-4)(x^2-1)$	− (<0)	+ (>0)	− (<0)	+ (>0)	− (<0)	+ (>0)

La solución:

$f(x)>0, (-3,-2)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$ $f(x)<0{:}(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(1,2)$

Ejemplo de desigualdad no lineal, racional:

Resuelve la desigualdad racional. Escribe la solución en forma de intervalo

$$\frac{x-5}{2x-1} \geq 2$$

- Igualando la expresión racional a cero (el cero es el elemento que divide lo negativo de lo positivo). Queda expresada de la siguiente forma.

$$\frac{x-5}{2x-1} - 2 \geq 0$$

- Resolviendo el lado izquierdo de la inecuación.

$$\frac{x-5-4x+2}{2x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{2x-1} \geq 0$$

- Se calcula el o los ceros del numerador y los valores para los cuales no está definida el denominador.

$$-3x-3=0\,;\,2x-1=0$$

$$x=-1\,;\,x=\frac{1}{2}$$

Los intervalos de análisis son:

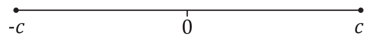
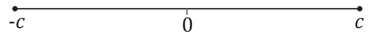
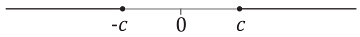
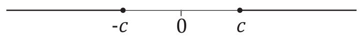
$$(-\infty,-1]\,;\,[-1,\frac{1}{2})\,;\,\left(\frac{1}{2},\infty\right)$$

Tabla de análisis:

	$(-\infty,-1]$	$[-1,\frac{1}{2})$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
$-3x+3$	+	−	−
$x+2$	−	-	+
$\frac{-3x-3}{2x-1}$	−	+	−

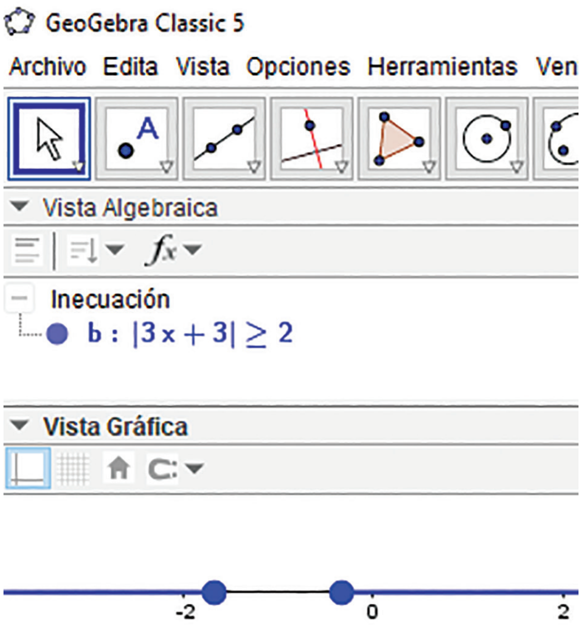
$$f(x) \geq 0\,;\,\text{Sol: } [-1,\frac{1}{2})$$

4.4 Desigualdades con valor absoluto

Desigualdades	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x\rvert < c$	$-c < x < c$	
2. $\lvert x\rvert \leq c$	$-c \leq x \leq c$	
3. $\lvert x\rvert > c$	$x < -c$ o $c < c$	
4. $\lvert x\rvert \geq c$	$x \leq -c$ o $c \leq x$	

Las propiedades antes descritas se cumplen cuando se reemplaza la variable $\mathbf{x}$ por cualquier expresión algebraica. (En lo mostrado en el cuadro anterior suponemos que $c > 0$)

Ilustración 45
Solución gráfica del ejemplo de desigualdad con valor absoluto mostrado.



Fuente: Geogebra 2017

Ejemplo de desigualdad con valor absoluto:

1. $|x - \mathbf{5}| < \mathbf{2}$
$-2 < x - 5 < 2$
$-2 + 5 < x < 2 + 5$
$3 < x < 7$

El conjunto solución es el intervalo abierto (3,7)

2. $|3x + 3| \geq 2$

De acuerdo a la propiedad, se tiene:

$3x + 3 \leq -2$ o bien $3x + 3 \geq 2$
$3x \leq -5$ o bien $3x \geq -1$
$x \leq -\frac{5}{3}$ o bien $x \geq -\frac{1}{3}$

El conjunto solución es $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup -\frac{1}{3}, \infty)$

3. $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \leq 1$

$-1 \leq \frac{2x-1}{x+3} \leq 1$

$x \neq -3$

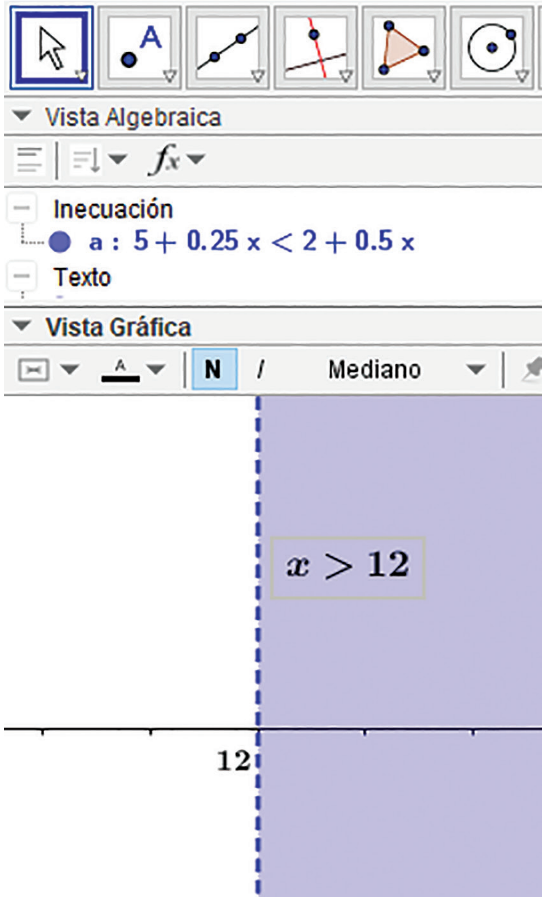
$-1 \leq \frac{2x-1}{x+3}$ y $\frac{2x-1}{x+3} \leq 1$

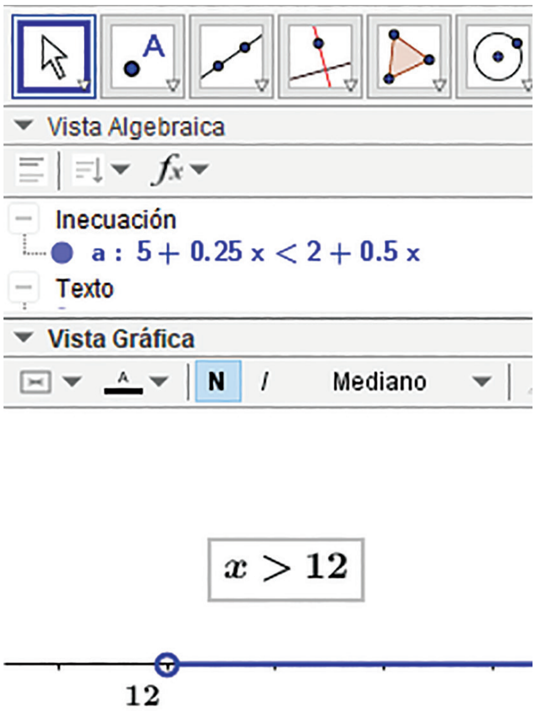
$0 \leq \frac{3x+2}{x+3}$ y $\frac{x-4}{x+3} \leq 0$

$x \in (-\infty, -3) \cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ y $x \in (-3, 4]$

La solución final es la intersección de las soluciones obtenidas: $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$

Ilustración 46
Solución gráfica del ejemplo de modelado con desigualdad.





Fuente: Geogebra 2017

4.5 Modelado con desigualdades

La vida cotidiana muestra con recurrencia interés en observar cuando una cantidad es mayor o menor que otra; por tanto, frecuentemente se presenta el modelado de problemas con desigualdades.

Proceso de resolución de problemas:

Identifica la variable

Expresa todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

Plantea el modelo

Resuelva

Ejemplo de modelado con desigualdades:

Un parque de diversiones tiene dos planes de pago:

1er Plan: Entrada 5 dólares y cada juego 25 centavos
2do Plan: Entrada 2 dólares y cada juego 50 centavos

¿Cuántas vueltas tendrá que dar para que el primer plan resulte menos costoso que el segundo plan?

Solución: $\mathrm{x} = \text{número de vueltas}$

La información en el problema se podría organizar como sigue:

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de vueltas	x
Costo con el primer plan	$5 + 0.25\,\mathrm{x}$
Costo con el segundo plan	$2 + 0.50\,\mathrm{x}$

Ahora planteamos el modelo:

Costo con el 1er. plan < Costo con el 2do. plan
$5 + 0.25\mathrm{x} < 2 + 0.50\mathrm{x}$
$3 + 0.25\mathrm{x} < 0.50\mathrm{x}$
$3 < 0.25\mathrm{x}$
$12 < \mathrm{x}$

Respuesta: si planea dar más de 12 vueltas, el 1er. plan es menos caro.

Ejercicios 4.2, 4.3, 4.4, 4.5: "Desigualdades "

1. Sea $S = \{-2, -1, 0, -\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de S cumplen con la desigualdad.

   a. $3 - 2x \leq \frac{1}{2}$
   b. $1 < 2x - 4 \leq 7$
   c. $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$
   d. $2x - 1 \geq x$
   e. $-2 \leq 3 - x < 2$

2. Resuelva la desigualdad lineal. Expresa la solución usando la notación de intervalos y grafica el conjunto solución en geogebra.

   a. $3x + 11 \leq 5$
   b. $5 - 3x \leq -16$
   c. $0 \leq 5 - 2x$
   d. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$
   e. $5 \leq 3x - 4 \leq 16$
   f. $-2 < 8 - 2x \leq -1$
   g. $3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$
   h. $\frac{1}{6} < \frac{2x - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$
   i. $-\frac{1}{2} \leq \frac{4 - 3x}{5} \leq \frac{1}{4}$

3. Resuelva la desigualdad no lineal. Expresa la solución usando la notación de intervalos y grafica el conjunto solución en geogebra.

   a. $(x + 5)(x - 3) < 0$
   b. $x(4x + 7) \geq 0$
   c. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
   d. $2x^2 + x \geq 1$
   e. $3x^2 - v3x \leq 2x^2 + 4$
   f. $x^2 \geq 3(x + 6)$
   g. $x^2 < 4$
   h. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \geq 0$
   i. $x^3 - 4x \leq 0$
   j. $\frac{x - 3}{x + 1} \geq 0$; colocar restricciones en su dominio
   k. $\frac{2x + 6}{x - 2} < 2$; colocar restricciones en su dominio
   l. $-2 < \frac{x + 1}{x - 3}$; colocar restricciones en su dominio
   m. $\frac{2x + 1}{x - 5} \leq 3$; colocar restricciones en su dominio
   n. $\frac{(x + 11)(x - 7)}{x - 1} \geq 0$; colocar restricciones en su dominio
   o. $1 + \frac{2}{x + 1} \leq \frac{2}{x}$; colocar restricciones en su dominio
   p. $\frac{x}{x + 1} > 3x$; colocar restricciones en su dominio
   q. $\frac{6}{x - 1} - \frac{6}{x} \geq 1$; colocar restricciones en su dominio
   r. $\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x + 1} + 4$; colocar restricciones en su dominio
   s. $\frac{x + 2}{x + 3} < \frac{x - 1}{x - 2}$; colocar restricciones en su dominio
   t. $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} \leq 0$; colocar restricciones en su dominio

4. Realiza la gráfica de las siguientes funciones racionales en el programa geogebra en línea y determine los valores de x para los cuales la mencionada función es: definida, indefinida, positiva y negativa.

   a. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 3} + 2$
   b. $f(x) = \frac{4x}{2x + 3} - 2$
   c. $f(x) = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x + 4}$
   d. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$
   e. $f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)\sqrt{x + 8}}$
   f. $f(x) = \frac{(2x + 3)\sqrt{x - 3}}{(x - 8)^2}$

5. Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando la notación de intervalos y grafica el conjunto solución.

   a. $|x| < 4$

b. $|x| \geq \frac{1}{3}$

c. $|2x| \geq 8$

d. $|x-4| > \frac{2}{5}$

e. $\frac{1}{2}|x| \geq 1$

f. $|3x-3| \leq 0.4$

g. $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 2$

h. $8-|2x-1| \geq 6$

i. $7|x+5| > 4$

j. $\left|\frac{2x-2}{x+3}\right| < 1$

k. $\left|\frac{5x-1}{x+2}\right| - 4 \geq 1$

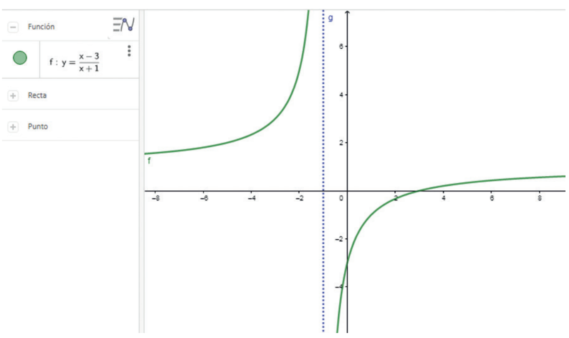
l. $3-|2x+1| < 1$

6. Se proporciona la frase que describe un conjunto de los números reales. Expresa la frase como una desigualdad en valor absoluto.

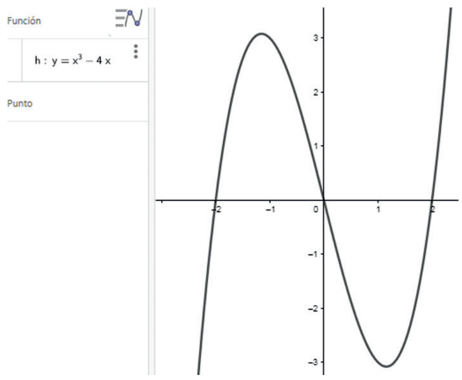
   a. Todos los números mayores que -5 y menores que 5
   b. Todos los números entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$
   c. Todos los números menores que $-\frac{1}{2}$ y mayores que $\frac{1}{2}$
   d. Todos los números reales x menores que 3 unidades a partir del 0
   e. Todos los números reales x de más de 2 unidades a partir del 0.

7. Las siguientes gráficas realizadas en el programa geogebra corresponden a funciones en el plano, determine a través de las mismas y comprueba analíticamente cuales son los valores de x para los cuales las mencionadas funciones son positivas y negativas.

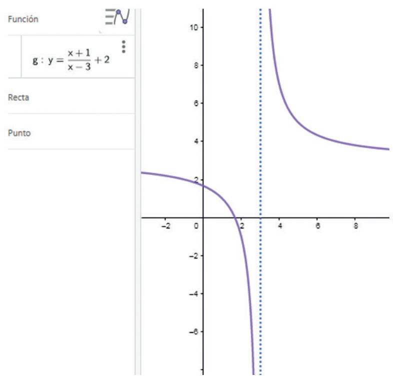
a.



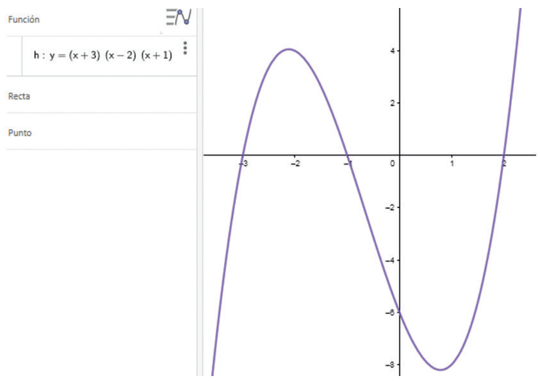
b.



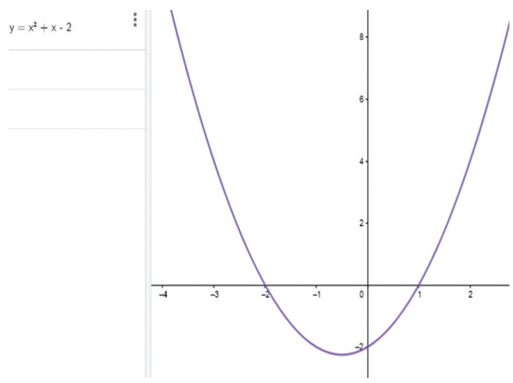
c.



d.



e.



8. Resuelve los siguientes problemas que son aplicaciones de desigualdades:

   a. ¿Qué intervalo de la escala de Celsius corresponde al intervalo $50 \leq F \leq 95$?

   b. Una compañía que renta vehículos ofrece dos planes para rentar un automóvil.

      Plan A: USD 30 por día y 10 centavos por milla.

      Plan B: USD 50 por día y gratis millas recorridas ilimitadas.

      ¿Qué valor de millas el plan B le hará ahorrar dinero, para un día de recorrido?

   c. Se estima que el costo anual de manejar un automóvil nuevo se obtiene mediante la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

      donde m representa la cantidad de millas recorridas al año y C es el costo en dólares. Jane compró uno de esos vehículos y decide apartar para el año próximo entre USD 6400 a 7100 para los costos de manejo. ¿Cuál es el intervalo de millas correspondiente que puede recorrer con su automóvil?

   d. La estatura promedio de un varón adulto es de 68.2 pulgadas y 95 % de los varones adultos tienen una altura **h** que cumple la desigualdad.

$$\left|\frac{h - 68.2}{2.9}\right| \leq 2$$

      Resuelve la desigualdad para determinar el intervalo de estaturas.

   e. Una mujer tiene 120 metros de cerca resistente a las ovejas. Quiere delimitar un huerto rectangular en su terreno que mida por lo menos 800 metros cuadrados. ¿Qué valores son posibles para el largo del huerto rectangular?

   f. La fuerza gravitacional **F** que ejerce la Tierra sobre un objeto cuya masa es de 100 kg se determina mediante la ecuación.

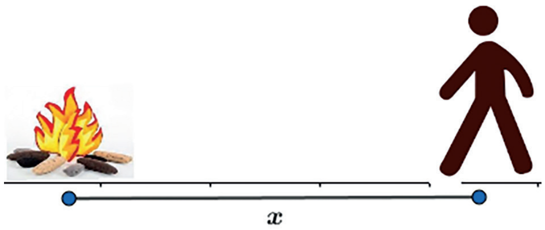
$$F = \frac{4000\,000}{d^2}$$

      donde **d** es la distancia en km del objeto desde el centro de la Tierra y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias la fuerza que ejerce la Tierra sobre este objeto estará entre 0.0004 N y 0.01 N?

   g. En las cercanías de una fogata, la temperatura T en °C a una distancia **x** metros desde el centro de la fogata se determina mediante la formula:

$$T = \frac{600\,000}{x^2 + 300}$$

      ¿A qué distancias del centro de la fogata la temperatura será menor de 500°C?



Excursiones matemáticas

1. ¿Cuántas cajas de bebidas de 35 cm de altura puede cargar el camión, una sobre otra, para que pueda pasar justo por debajo de un portal de 2,70 m de altura?

   a. Describe la altura de la carga por medio de un término.

   b. Expresa la altura de la carga por medio de una inecuación. ¿Cuántas cajas de bebidas pueden ser cargadas como máximo una sobre otra?

2. Un equipo aspersor de jardín rocía 400 litros de agua por hora. ¿Cuánto tiempo se puede dejar prendido, si ya ha rociado 800 litros y máximo debe rociar 1800 litros?

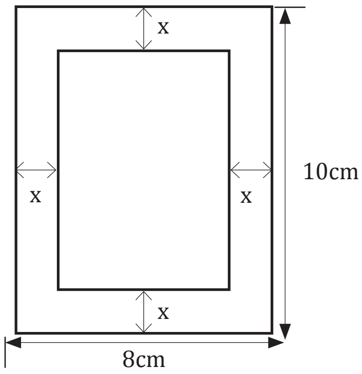
3. El peso de una camioneta es de 2450 kg. La diferencia entre el peso de la camioneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 1250 kg. Si hay que cargar cinco cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa camioneta?

4. Se van a empacar latas de 300 g cada una. Hay que contar con 500 g para el empaque. El paquete total debe pesar máximo 12 kg. ¿Cuántas latas se pueden empacar como máximo?

5. El perímetro de un rectángulo debe ser máximo de 26 cm. Uno de los lados del rectángulo es cuatro veces tan largo como el otro. ¿Qué longitud máxima tienen los lados?

6. Se desea construir un corral rectangular para un conejo utilizando una malla de 20 m de longitud. ¿Cuáles deben ser las longitudes del rectángulo si se desea obtener un área mayor a 16 m2?

7. En un aviso publicitario como se presenta en la figura, se desea ampliar el espacio para el texto reduciendo el margen. ¿Cuánto pueden medir las longitudes del rectángulo que corresponden al texto?



8. La fórmula $t^2 + 6t + 56$ en miles de millones de dólares es la proyección del producto bruto interno de un país XYZ, donde t representa los años que se mide a partir del año en curso. Determina el momento en que el producto bruto interno del país XYZ exceda o sea igual a los 72 mil millones de dólares.

CAPÍTULO 5: Introducción a la geometría analítica y la recta

Objetivos:

5.1 Identificar las coordenadas de un punto en el plano y conocer su interpretación gráfica.
5.2 Reconocer y representar gráficamente lugares geométricos de puntos a distancia constante de los ejes.
5.3 Representar las diferentes formas de ecuación de la recta.
5.4 Representar ecuaciones rectas paralelas y perpendiculares.

Contenidos:

En este capítulo el estudiante encontrará los siguientes contenidos:

- Coordenadas cartesianas
- Distancia entre dos puntos, punto medio
- La recta, características y formas de representación
- Rectas paralelas y perpendiculares

Reseña histórica:

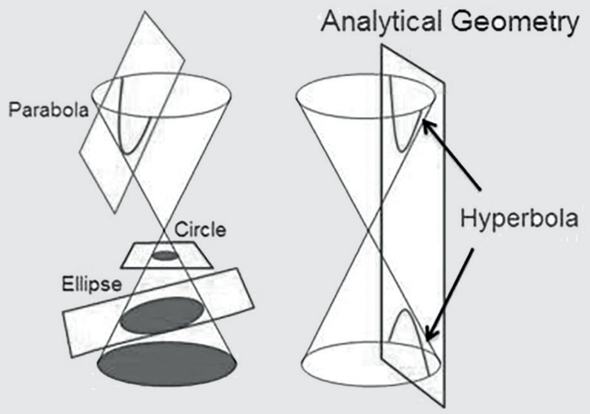
Menecmo, matemático y geómetra griego, en el año 350 a. C., planteó el problema de la duplicación del cubo (construir un cubo de doble volumen que otro dado) y probablemente descubrió las secciones cónicas, es decir, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Los matemáticos griegos Euclides y Apolonio de Perga introdujeron los dos primeros conceptos sobre geometría analítica: el primero, al organizar muchos resultados en su libro clásico Los elementos; el segundo, en su libro Cónicas, en el cual definió una ´cónica´ como la intersección entre un cono y un plano. (Boyer, 1986).

En el siglo XVII, René Descartes y Pierre de Fermat definieron la idea fundamental sobre la geometría analítica, cuyas bases se fundamentan en los trabajos de la antigua Grecia, especialmente en las investigaciones de Apolonio y Euclides, quienes tuvieron una gran influencia en esta área de las matemáticas, y al adoptar el álgebra de Vieta para el estudio del lugar geométrico.

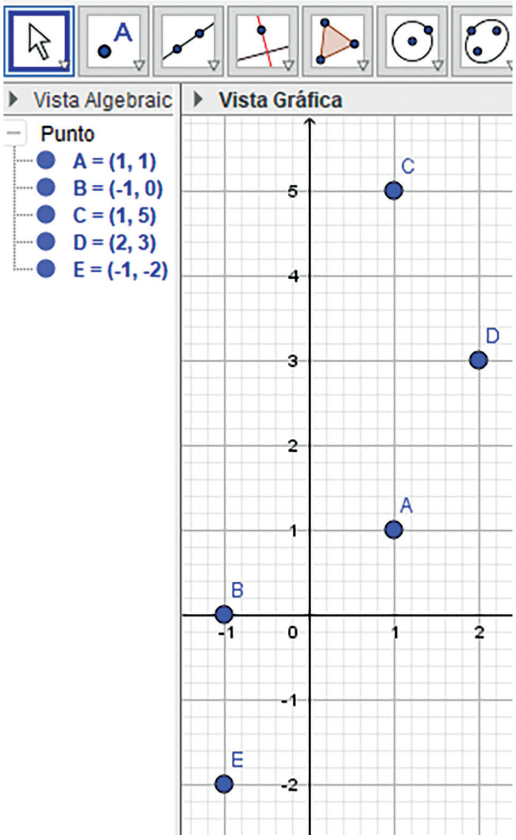
En síntesis, la geometría analítica constituye, por un lado, la integración de las contribuciones matemáticas, de la geometría, como el estudio de la forma y, por otro, de la aritmética y álgebra, que tienen que ver con la cantidad o los números. Es decir, es la aplicación del álgebra simbólica aplicado al estudio de problemas geométricos con base en la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas utilizando sistemas de coordenadas

(Delshams, 2008).



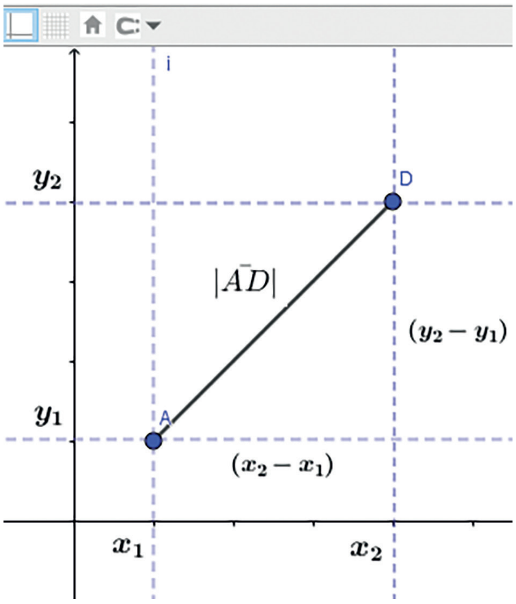
Cónicas (Martínez, 2014)

Ilustración 47
Puntos en el plano x,y



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 48
Distancia entre dos puntos en el plano x,y.



Fuente: Geogebra 2017

5.1 Coordenadas cartesianas

Las coordenadas cartesianas de un punto del plano permiten ubicarlo en el plano de forma bien determinada. Cuando hablamos de plano nos referimos a:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

A un elemento de $\mathbb{R}^2$ lo llamamos punto del plano, o vector del plano. El eje de las **x** (de las abscisas) es $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. El eje de las **y** (de las ordenadas) es $\{(0,y) : x \in \mathbb{R}\}$. El punto $(0, 0)$ se denomina origen

(Swokowski y Cole, 2011).

Para graficar un punto (x,y) del plano. Se ubica su coordenada en las **x**, luego se traza una línea vertical. Se ubica su coordenada en las **y**, se traza una línea horizontal. Finalmente, el punto (x,y) es aquel donde se cortan estas líneas.

5.2 Fórmula de la distancia

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera en el plano, y se desea obtener la distancia no negativa entre ambos puntos. Denotamos a esta distancia por $|\overline{P_1 P_2}|$. Se emplean las barras de valor absoluto porque interesa únicamente la longitud que es un número no negativo.

(Louis Leithold, 1982).

Usando el teorema de Pitágoras,

$$|\overline{P1\,P2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

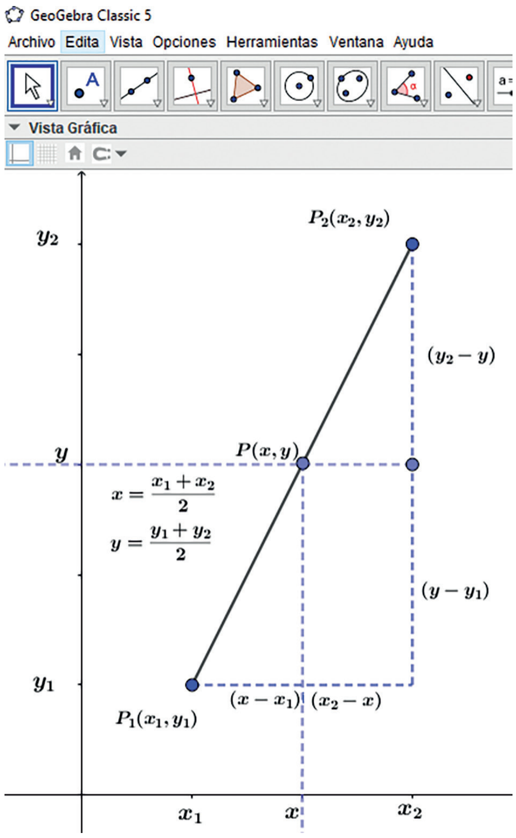
Ejemplo de distancia entre dos puntos

Demuestra que el triángulo con vértices en $A(-2,4), B(-5,1)$, y $C(-6,5)$ es isósceles.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6+5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$$
$$|\overline{BA}| = \sqrt{(-2+5)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-6+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{17}$$

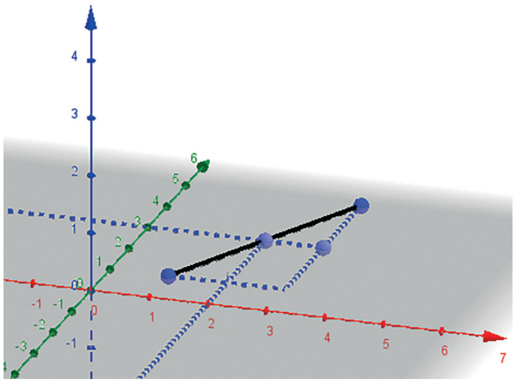
Por tanto, $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$
El triángulo es isósceles.

Ilustración 49
Gráfica del punto medio de un segmento de recta en dos dimensiones



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 50
Gráfica del punto medio de un segmento de recta en tres dimensiones



Fuente: Geogebra 2017

5.3 Fórmula del punto medio

Sean $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento rectilíneo, que se denotan por $P_1\,P_2$ siendo este un segmento de recta. Sea $P(x,y)$ el punto medio del segmento rectilíneo $P_1\,P_2$, se tiene que:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Análogamente se tiene que:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio de un segmento rectilíneo son, respectivamente, el promedio de las abscisas (x), y el promedio de las ordenadas (y).

(Leithold, 1982)

Ejemplo de punto medio entre dos puntos

Si un extremo de un segmento rectilíneo es el punto $A(-4,2)$, y el punto medio es $P_m\,(3,-1)$ encuentra las coordenadas del otro extremo del segmento.

Solución:

$A(-4,2);$

$x_1 = -4, y_1 = 2$

$P_m\,(3,-1);$

$x_m = 3, y_m = -1$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-4 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 10$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-4 + x_2}{2} \Rightarrow y_2 = 2$$

El otro extremo del segmento es el punto $B(10,2)$.

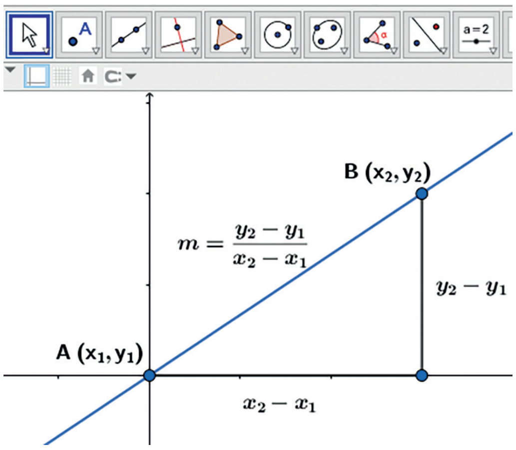
Ilustración 51

Relación entre un desplazamiento vertical y un desplazamiento horizontal

Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 52

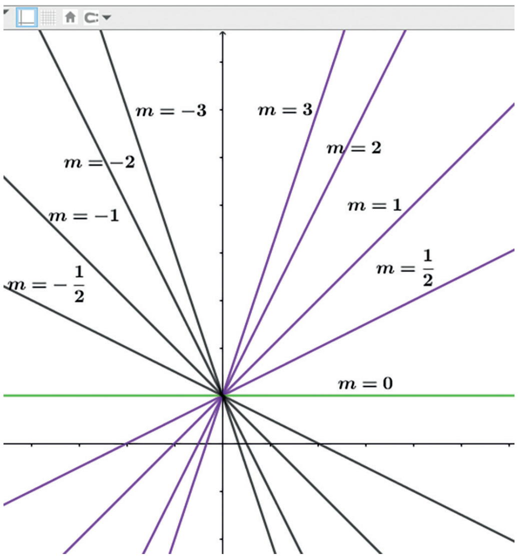
Pendiente de una recta.



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 53

Rectas con pendientes diferentes



Fuente: Geogebra 2017

5.4 La recta

Se tiene una recta no vertical al unir dos puntos cualesquiera sobre el plano x,y.

Las ecuaciones de la recta dependen de la inclinación de la misma, a esta inclinación se le conoce como pendiente de la recta.

Pendiente de la recta

La pendiente m de una recta que no es vertical y que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, es

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

$$m = \text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- La pendiente de una recta horizontal es cero, debido a que los dos puntos que unen la recta tienen $y_2 = y_1$
- La pendiente de una recta vertical no está definida.

(Stewart, 2009)

La pendiente de la recta es independiente de los puntos que se tome como referencia, la pendiente es positiva si el ángulo de inclinación de la recta es menor que 90°, y es negativa si es mayor que 90°.

Ejemplo de pendiente de una recta

1. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(8,11)$.

$$m = \frac{11 - 1}{8 - 2}$$

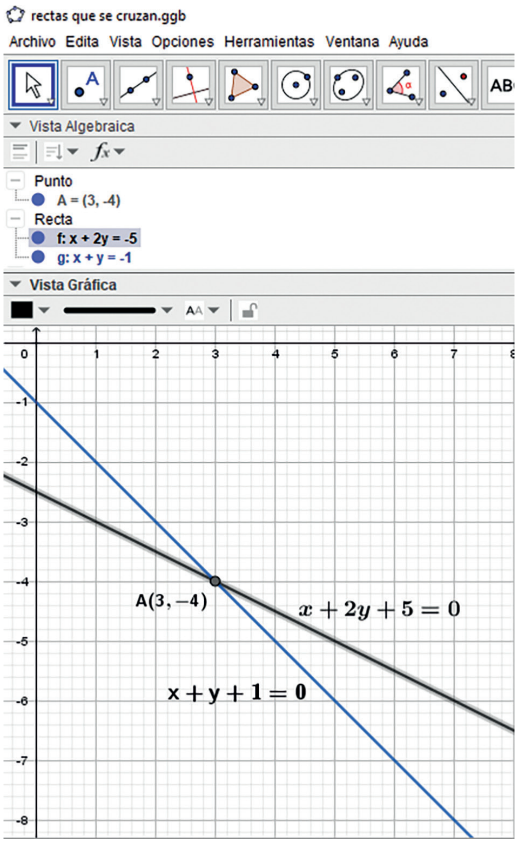
$$m = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

2. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(-2,1)$ y $B(-8,11)$.

$$m = \frac{11 - 1}{-8 - (-2)}$$

$$m = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$$

Ilustración 54
Resolución del ejemplo número 3 de ecuaciones de la recta



Fuente: Geogebra 2017

Ecuaciones de la recta

Primer caso: Si una recta pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x,y)$ la pendiente es m.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Se escribe esta ecuación de la forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo de la ecuación de una recta

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -3)$ y su pendiente es $-\frac{1}{2}$

Solución:

Aplicando la forma de la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x + 2y + 5 = 0$$

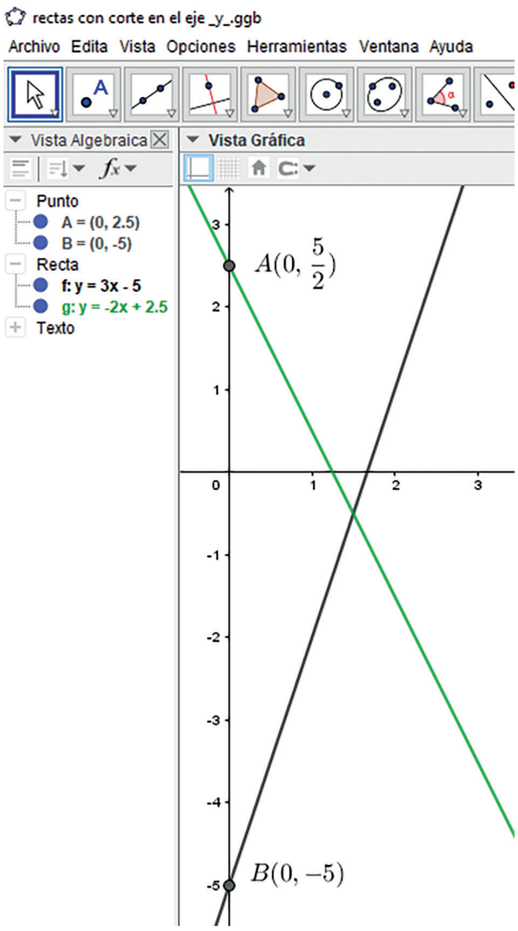
2. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,-1)$ y $(1,-2)$.

Solución:

Se calcula la pendiente de la recta

$$m = \frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1$$

Ilustración 55
Gráfica de dos ecuaciones de la recta dada la pendiente y coordenada en el origen



Fuente: Geogebra 2017

Con uno de los dos puntos dados y la pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -1(x - 0)$$

$$y + 1 = -x$$

$$x + y + 1 = 0$$

3. Con el programa Geogebra grafica las dos rectas encontradas en el numeral 1 y 2, y escribe el punto de intersección entre ellas.(Ilustración 54)

Segundo caso: Supón una recta no vertical que tiene una pendiente **m** y que corta al eje de las **y** en el punto (0,b), de modo que la ecuación, cuando se da un punto y la pendiente se vuelve.

$$y - b = m(x - 0)$$

Forma de la ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen

Una ecuación de la recta que tiene una pendiente m y cuya ordenada en el origen es b es:

$$y = mx + b$$

Ejemplo de la ecuación de una recta dada la pendiente y ordenada en el origen

1. Calcula la ecuación de la recta con pendiente 3 y ordenada en el origen igual a -5,

Solución:

De acuerdo con la ecuación:

$$y = mx + b$$

$$y = 3x - 5$$

2. Calcula la pendiente y ordenada en el origen de la ecuación $3x + 5y - 4 = 3y - x + 1$,

Solución:

Ordenando la ecuación se tiene:

$$3x + x + 5y - 3y - 4 - 1 = 0$$
$$4x + 2y - 5 = 0$$
$$y = -2x + \frac{5}{2}$$
$$m = -2 \text{ y } b = \frac{5}{2}$$

3. Con el programa Geogebra grafica las dos rectas encontradas en el numeral **1** y **2** y denotar los puntos de cruce con el eje y.

Tercer caso: Una ecuación lineal es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

Si $B \neq 0$ la ecuación se transforma en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

de donde se puede observar que ésta es la ecuación de la recta dadas la pendiente y la ordenada en origen.

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Errores y correcciones frecuentes

$Si\ Ax + By + C = 0$; $A, B, C\ son\ constantes$

La pendiente m es:

Error: $m = A$

Corrección: $m = -\frac{A}{B}$

$Si\ Ax + By + C = 0$; $A, B, C\ son\ constantes$

El intercepto con el eje "y" es:

Error: $b = C$

Corrección: $b = -\frac{C}{B}$

Ecuación general de la recta

La gráfica de toda ecuación lineal es una recta

$Ax + By + C = 0$
(A,B no son simultáneamente cero)

Ejemplo de ecuación general de la recta:

1. Calcula la ecuación de la forma general de la recta que pasa por los puntos:

$$A(0,2) \text{ y } B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Solución:

$$m = \frac{0-2}{\frac{1}{2} - 0} = -4$$

Se toma el corte en el eje **y:**

$$b = 2$$
$$y = mx + b$$
$$y = -4x + 2$$
$$4x + y - 2 = 0$$

Dato Curioso

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Es considerado el matemático más grande de los tiempos modernos. Sus contemporáneos lo llamaron el Príncipe de las matemáticas. Nació en una familia pobre; su padre se ganó la vida como albañil.

Cuando era muy pequeño, Gauss encontró un error de cálculo en las cuentas de su padre, el primero de muchos incidentes que dieron evidencia de su precocidad matemática.

A los 19 años, Gauss demostró que el polígono regular de 17 lados se puede construir con una regla y compás solamente. Esto fue notable porque, desde la época de Euclides, se pensaba que los únicos polígonos regulares que se podían construir de esta forma eran el triángulo y el pentágono.

Como resultado de este descubrimiento, Gauss decidió seguir una carrera en matemáticas en lugar de idiomas, su otra pasión. En su disertación doctoral, escrita a la edad de 22 años, Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra: un polinomio de grado **n** con coeficientes complejos tiene **n** raíces. Sus otros logros abarcan cada rama de las matemáticas, así como la física y la astronomía.

(Stewart, 2007)
Imagen (IMAGES, 2018)

2. Calcula la pendiente y el corte en el eje **y** dada la forma general de la ecuación de la recta:

$$x - 4y + 5 = 0$$
$$Ax + By + C = 0$$
$$A = 1, \quad B = -4, C = 5$$
$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$
$$m = -\frac{1}{(-4)} \text{ y } b = -\frac{5}{(-4)}$$
$$m = \frac{1}{4} \text{ y } b = \frac{5}{4}$$

Rectas verticales y horizontales

Una ecuación de la vertical que pasa por (a,b) es $x = a$

Una ecuación de la horizontal que pasa por (a,b) es $y = b$

En una recta vertical se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ donde } x_1 = x_2$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ por tanto}$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{0}, \text{ no esta definida}$$

En una recta horizontal se tiene:

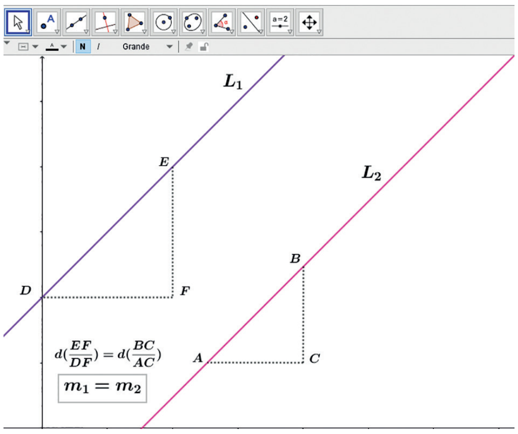
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ donde } y_1 = y_2$$
$$m = \frac{0}{x_2 - x_1}, \text{ por tanto}$$
$$m = 0$$

Ejemplo de ecuación de una recta horizontal

Calcula la ecuación de la recta horizontal y paralela al eje **x**, que cruza por el punto vértice de la parábola que representa la siguiente ecuación:

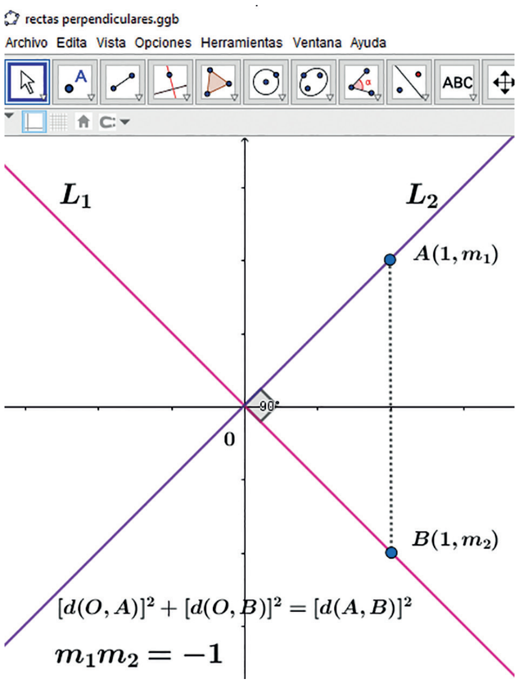
$$y = x^2 + 5x + 6$$

Ilustración 56
Gráfica de dos rectas paralelas entre sí



Fuente: Geogebra 2017

Ilustración 57
Gráfica de dos rectas perpendiculares entre sí



Fuente: Geogebra 2017

Solución:

De la ecuación de segundo orden dada se obtiene el punto vértice

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(1)} = -\frac{5}{2}$$

$$y_v = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) + 6$$

$$y_v = -\frac{1}{4}$$

La recta horizontal y paralela al eje **y** que cruza por el por el vértice mencionado es:

$$y = -\frac{1}{4}$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si y solo si tienen pendientes iguales.

$$m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares

Dos rectas L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si, solo sí sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ejemplos de ecuaciones de la recta

1. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a $y = -3x + 4$ y que pasa a través del punto $P(-4, -6)$.

Solución:

Por condiciones de perpendicularidad se tiene:

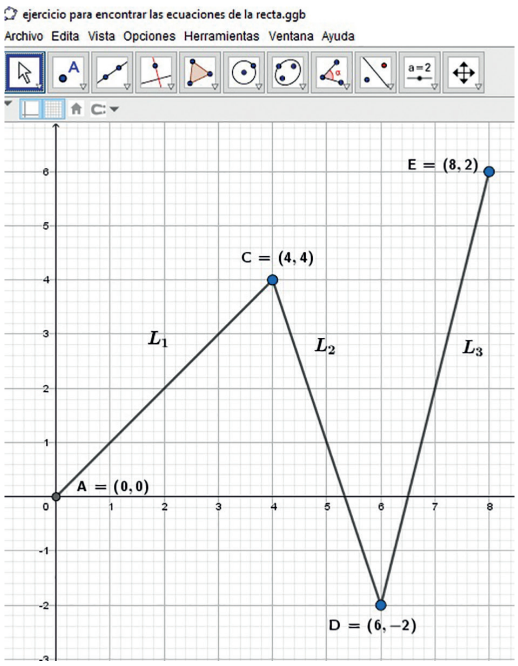
$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{(-3)}$$

$$m_2 = x + \frac{1}{3}$$

Ilustración 58

Gráfica del ejemplo 2 de ecuaciones de la recta



Fuente: Geogebra 2017

Con la pendiente m_2 y el punto $P(-4,-6)$ se calcula usando la fórmula punto pendiente la ecuación de la recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 6 = \frac{1}{3}(x + 4)$$

La ecuación de la recta solicitada es:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$$

2. Calcula las ecuaciones en los intervalos dados, utiliza la gráfica de la ilustración 58.

En el intervalo $x \in (0,4)$

En el intervalo $x \in (4,6)$

En el intervalo $x \in (6,8)$

Solución:

En el intervalo $x \in (0,4)$; se toma los puntos $A(0,0)$ y $C(4,4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ por tanto}$$

$$m = \frac{4-0}{4-0} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$y = x$$

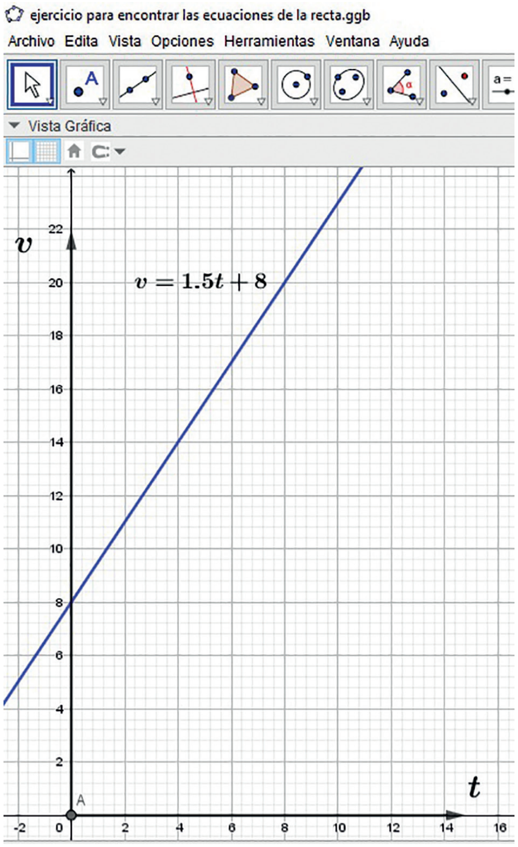
En el intervalo $x \in (4,6)$; se toma los puntos $C(4,4)$ y $D(6,-2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ por tanto}$$

Ilustración 59

Gráfica solicitada en el ejemplo 1 de aplicaciones de la recta

https://bit.ly/2XtB4qq



Fuente: Geogebra 2017

$$m = \frac{-2 - 4}{6 - 4} = -3$$

$$y - 4 = -3(x - 4)$$

$$y = -3(x - 4) + 4$$

$$y = -3x + 16$$

En el intervalo $x \in (6,8)$; se toma los puntos $C(6, -2)$ y $D(8,2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ por tanto}$$

$$m = \frac{2 - (-2)}{8 - 6} = 2$$

$$y - 2 = 2(x - 8)$$

$$y = 2(x - 8) + 2$$

$$y = 2x - 14$$

Ejemplos de aplicaciones de la recta

1. Una presa está construida sobre un río para tener un embalse. El nivel de agua **v** en el embalse está dada por la ecuación.

$$v = 1.5\,t + 8$$

Donde **t** es la cantidad de años desde que la presa se construyó, y **v** se mide en metros.

a. Trace la gráfica de esta ecuación en el programa Geogebra.
b. ¿Qué representa la pendiente y la intersección con el eje **v** de este ejercicio?

Solución:

a. La gráfica solicitada se encuentra en la ilustración 59.

Para realizar el gráfico se puede tomar dos puntos del proceso,

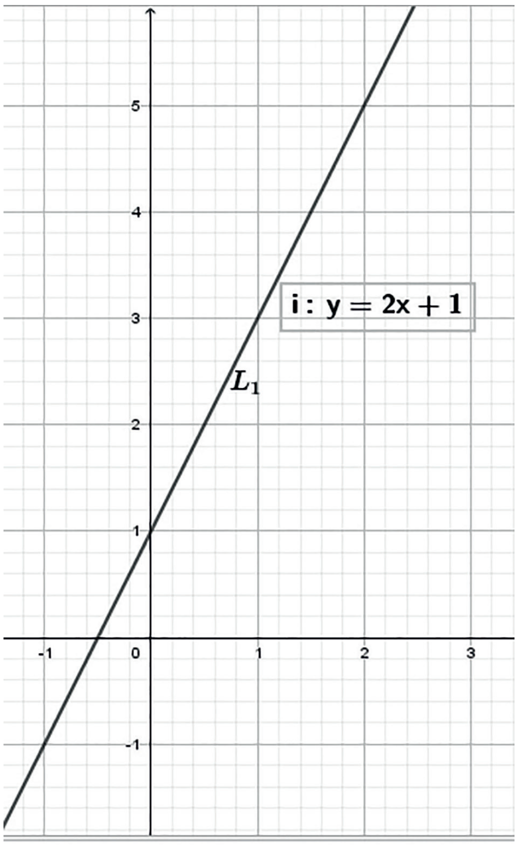
$$\text{Si } t = 0, v = 8$$

$$\text{Si } t = 1, v = 9.5$$

b. La pendiente de esta ecuación es $m = 1.5$; representa la tasa de cambio del nivel del agua con respecto al tiempo.

- Esto significa que el nivel del agua se incrementa 1.5 metros por año.
- La intersección con el eje **v** es 8, y esto sucede cuando $t = 0$. Por tanto, este representa el nivel del agua en el momento que la presa fue construida.

Ilustración 60
Gráfica de representación del ejemplo 2 de aplicaciones de la recta



Fuente: Geogebra 2017

2. Muchas situaciones de la vida diaria pueden plantearse como ecuaciones de la recta.

Como ejemplo se crea la ecuación de la recta de "el tiempo de uso de plataforma virtual en la materia de Introducción al Cálculo en la semana, según la cantidad de estudiantes que existe en un paralelo".

Solución

"Se estima que cada estudiante debe obligatoriamente usar 2 horas semanales la plataforma virtual, y además se considera que se tiene 1 hora extra obligatoria para retroalimentación".

Se escribe la función $\mathrm{T(n)}$ que representa el tiempo de uso de plataforma virtual, y "n" la cantidad de estudiantes que existe en un paralelo.

Con un estudiante que ingrese a la plataforma virtual el tiempo de uso es:

$\mathrm{T}\ (1) = 2(1) + 1 = 3$, de la misma forma:

$\mathrm{T}(2) = 2(2) + 1 = 5$

$\mathrm{T}(3) = 2(3) + 1 = 7$

$\mathrm{T}(4) = 2(4) + 1 = 9$

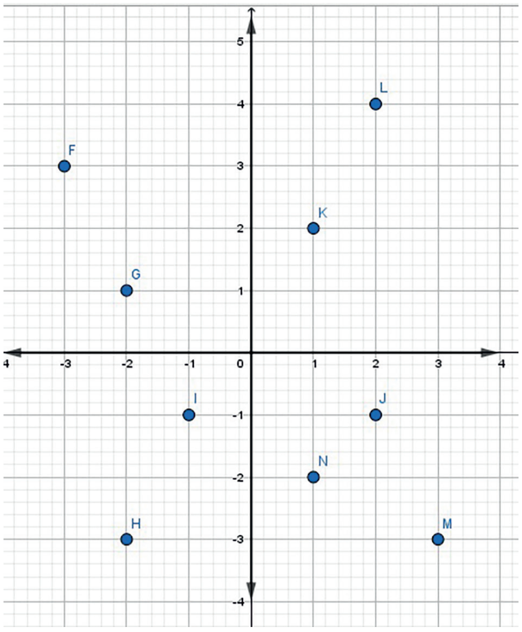
Por lo tanto, podemos deducir que:

$\mathrm{T(n)} = 2\mathrm{n} + 1$, representa el tiempo de uso de la plataforma virtual según "n" estudiantes que ingresen a la misma.

De esta forma: $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 1$;   representa la ecuación de la recta, de la situación mencionada.

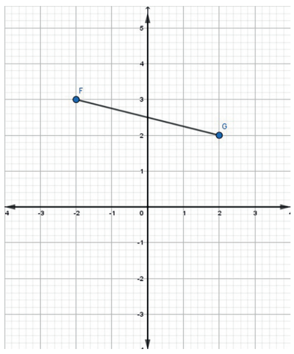
Ejercicios 5.1, 5.2, 5.3, 5.4
Introducción a la geometría analítica y la recta

1. Encuentra las coordenadas de los puntos mostrados en la siguiente ilustración.

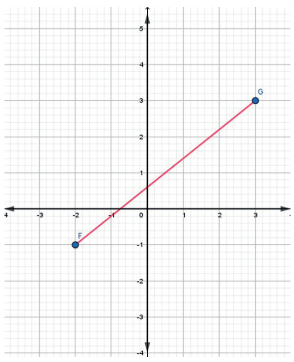


2. De acuerdo con las siguientes ilustraciones determina la distancia entre los dos puntos, y calcula el punto medio del segmento que los une.

a.



b.



3. Resuelve los siguientes ejercicios

a. Dados los puntos $A(-3,2)$ y $B(1,7)$. Halla las coordenadas del punto medio del segmento que determinan.

b. Los puntos $A(-4,-5)$, $B(4,2)$, y $C(1,6)$ forman un triángulo. Grafica en Geogebra el triángulo que se forma al unir los puntos medios de cada lado del triángulo original.

c. Un segmento de recta está determinado por los puntos A y B, y el punto medio está dado por **M**. Si las coordenadas de A son $(-1,3)$ y de **M** son $(5,8)$. Calcula las coordenadas del punto B.

d. Calcula el perímetro del triángulo formado por los puntos:

$A(-3,6)$, $B(6,5)$ y $C(1,6)$.

e. Calcula el perímetro del triángulo formado por los puntos medios de los lados de un triángulo formado por los puntos

$A(-8,6)$, $B(2,5)$ y $C(1,7)$.

f. Demuestra que los siguientes puntos son vértices de un triángulo rectángulo:

$A(3,2)$; $B(5,-4)$ y $C(1,-2)$

g. Demuestra analíticamente cuál de los dos puntos $A(6,7)$ o $B(-5,8)$ está más cercano al origen.

4. Calcula la pendiente que pasa por los puntos dados.

a. $P(7,5)$ y $Q(2,7)$

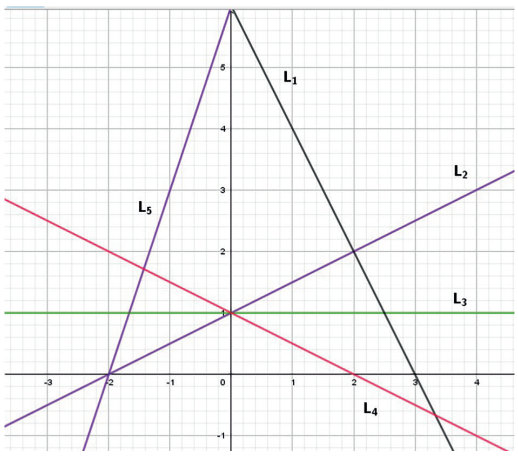
b. $M(5,3)$ y $N(-5,3)$

c. $D(-2,-1)$ y $E(-1,2)$

d. $L(-2,2)$ y $M(-2,-3)$

e. $T(4;-2{,}5)$ y $U\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{3}{4}\right)$

5. Calcula las pendientes de las rectas que se muestran en la siguiente ilustración.

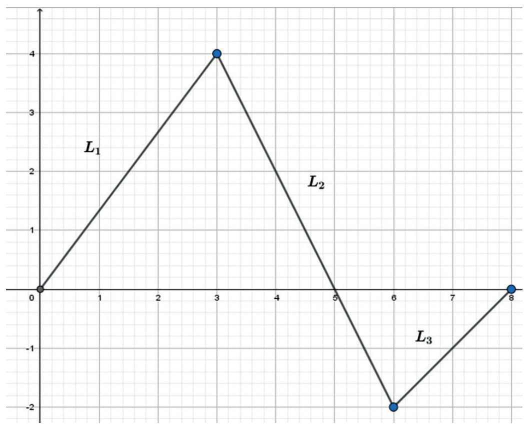


6. Determina la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada al origen.

   a. $m = \frac{1}{2}$; el intercepto es $(0,3)$
   b. $m = 2$, y pasa por $(2,8)$
   c. $m = 2$, y pasa por $(5,3)$
   d. $m = -2$, y pasa por $(-6, -4)$
   e. $m = \frac{5}{6}$, y pasa por $(5,7)$

7. Calcula las ecuaciones en los intervalos dados, utiliza la gráfica mostrada.

   a. En el intervalo $x \in (0,3)$
   b. En el intervalo $x \in (3,6)$
   c. En el intervalo $x \in (6,8)$



8. Calcula una ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.

   a. Pasa por $(-1,2)$ y $(4,5)$
   b. Intersección con el eje x en 1; ordenada al origen $y = -2$
   c. Intersección con el eje x en 0; ordenada al origen $y = -\frac{2}{3}$
   d. Pasa por $(2,3)$; paralela al eje x
   e. Pasa por $(4,5)$; paralela al eje y
   f. Pasa por $(2,6)$; paralela a la recta $x + 2y = 0$
   g. Pasa por $(2,5)$; perpendicular al eje y
   h. Pasa por $(3, -2)$; paralela a la recta que pasa por $(-5,7)$ y $(6,1)$
   i. Pasa por $(-8,-9)$; perpendicular a la recta $2x - y + 5 = 0$
   j. Pasa por $(0.5, -3\frac{1}{2})$ y $(\frac{5}{2}, -2\frac{1}{3})$
   k. Pasa por el punto donde se cortan las rectas $4x + 9y + 7 = 0$ y $x - 6y - 23 = 0$ y el punto $P(2,7)$.

9. Calcula:

   a. El área del triángulo que forma la recta $3x - 4y - 12 = 0$ con los ejes de coordenadas.

   b. Si f y g representan funciones lineales de rectas paralelas, encuentra el valor de k, si: $f(x) = (7 - 2k)x + kx + 5$ y $g(x) = 3 - (4k - 1)x$

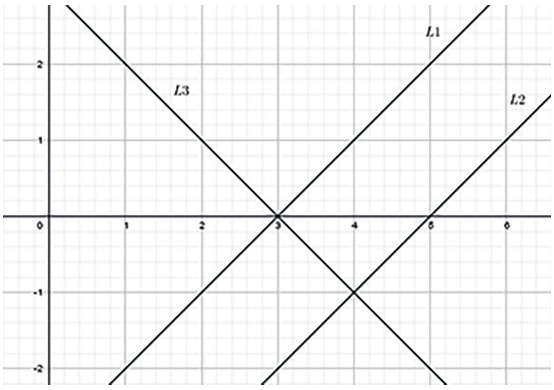
   c. Si $f(x) = (4 - 3k)x + 2$ y $g(x) = -(-2k - 11)x + 6$, representan funciones lineales de rectas paralelas, encuentra el valor de k.

10. Grafica:

   a. La ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas: $y = 2x + 6$; $y = -2x + 6$ y por el punto $P(3,5)$.

   b. La ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas: $y = -2x + 5$; $y = -x$ y por el punto $P(-3,1)$.

11. De acuerdo con la siguiente gráfica, interpreta y determina la ecuación de las rectas $L1$, $L2$ y $L3$.



Aplicaciones

1. Se espera que un terreno adquirido en $50\ 000$ en la urbanización «Las Delicias», incremente su valor a una tasa constante de 3000 dólares por año durante los siguientes 5 años.

    a. Determina una ecuación de la forma $y = mx + b$ que pronostique el valor del terreno en los próximos años.

    b. ¿Cuál será el valor en los próximos 5 años?

2. Un fabricante obtuvo los siguientes datos relacionados con el costo **y** (en dólares) con el número de unidades (x) de un artículo:

Unidades producidas (x)	0	20	40	60	80
Costo en dólares (y)	200	208	222	230	242

    a. Grafica el costo (y) contra la cantidad producida (x).

    b. Traza una línea recta que pase por los puntos $(0,200)$ y $(100,250)$.

    c. Deduce una ecuación de la línea recta del literal (b).

    d. Considerando esta ecuación como una aproximación de la relación entre el costo y el nivel de producción, calcula el costo de producir 65 unidades del artículo.

3. En la casa de Julia, cada persona se come dos panes al día. Adicionalmente, su mamá siempre compra tres panes extra para que la bolsa del pan nunca quede vacía.

    a. Determina una ecuación de la forma $y = mx + b$ que representa la cantidad de pan a comprar $P(n)$, y **n** la cantidad de personas que se encuentran en la casa.

    b. ¿Cuántos panes se debería comprar para 5 personas?

    c. Con 27 panes, ¿cuántas personas comerían?

4. Se conoce que a nivel del mar el agua hierve a $100\ °C$, esto equivale a $212\ °F$. El agua se congela a $32\ °F$ que equivale a $0\ °C$. Teniendo esta información, encuentra la ecuación que transforma grados Fahrenheit a Celsius (centígrados).

5. Sea la demanda d y la oferta o de un determinado bien, y p el precio de este. Si las funciones de oferta o y demanda d se representan de la siguiente manera:

    Oferta: $o = 50\ p - 300$
    Demanda: $d = 150 - 10p$

    a. Calcula el precio de equilibrio del bien y explica qué ocurriría si el precio fuera superior o si fuera inferior.

    b. Calcula la demanda y oferta para cada uno de los precios anteriormente analizados.

6. Las curvas de oferta y demanda de mercado de un determinado producto son:

    Oferta: $o = 50\ p - 100$
    Demanda: $d = 20900 - 100p$

    a. Calcula el precio de equilibrio de mercado y la cantidad que se intercambia al precio.

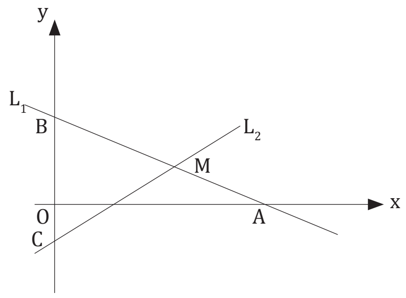
    b. Determina las cantidades ofrecidas y demandadas a precios de $USD\ 160$ y $USD\ 120.$

Excursiones matemáticas

1. El precio de arranque de una carrera de taxi en la ciudad de Quito es de $0{,}50$ **centavos** y el kilómetro recorrido $0{,}40$ **centavos.**

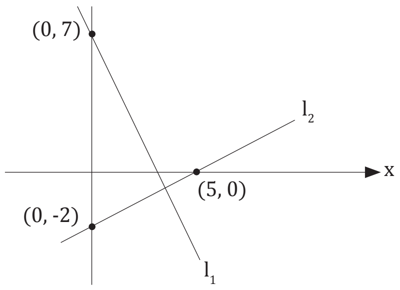
   a. Determina una fórmula para una carrera de taxi en la ciudad de Quito.
   b. ¿Qué valor se debe pagar si el taxi ha recorrido $10\ \mathrm{km}$?
   c. Si se pagan USD $8{,}50$, ¿cuántos kilómetros ha recorrido el taxi?

2. La línea $L1$ cuya ecuación es $3x + 4y = 24$. $L1$ corta al eje x en A y al eje y en B.



   a. Escribe las coordenadas de A y B
   b. M es el punto medio del segmento AB
      Escribe las coordenadas de M.
   c. La línea $L2$ pasa por el punto M y el punto C$(0, -2)$.Escribe la ecuación de la recta $L2$.
   d. Calcula las longitudes de MC y AC.

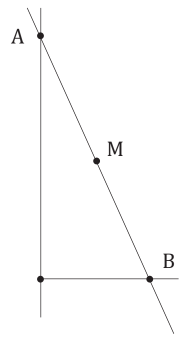
3. El siguiente diagrama muestra las líneas l_1 y l_2, que son perpendiculares entre sí.



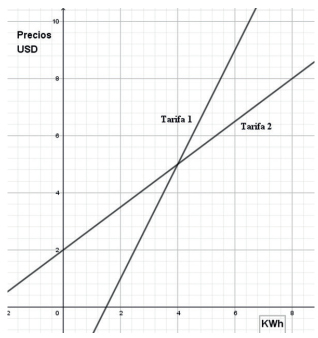
   a. Calcula la pendiente de la línea l_1
   b. Escribe la ecuación de la recta l_2
   c. Escribe la ecuación de la línea l_1 en la forma $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números enteros y $a > 0$.
   d. Calcula el punto de intersección de l_1 y l_2.

4. El siguiente diagrama muestra la recta con ecuación $3x + 2y = 18$. Los puntos A y B son las intersecciones con los ejes Y y X respectivamente. M es el punto medio de AB.

   Calcula las coordenadas de:



   a. el punto A
   b. el punto B
   c. el punto M



5. El siguiente diagrama muestra las ecuaciones de dos tarifas.

   a. Determina las ecuaciones de las dos tarifas
   b. ¿Para qué consumo se paga el mismo valor?
   c. ¿En qué casos es más conveniente la tarifa 1?
   d. ¿En qué casos es más conveniente la tarifa 2?

Solucionario

Capítulo 1

Ejercicios 1.1: Números reales

1.

Número	Número opuesto	Número inverso
$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$
-8	8	$-\frac{1}{t}$
$-t$	t	$-\frac{1}{t}$
$\frac{p}{q}$; $(q \neq 0)$	$-\frac{p}{q}$	$\frac{q}{p}$

2.

a. 3 y 5
b. -5 y -3
c. 6 y 7
d. -4 y -3

3.

a. $2\frac{1}{2} < 2\frac{2}{3}$

b. $-2\frac{2}{3} > -2\frac{4}{5}$

c. $4{,}5 > 4{,}05$

d. $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

4.

a. 5,25

b. $\frac{1}{16}$

5.

$-1\frac{4}{10}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{11}{20}$; $-\frac{5}{10}$; $-\frac{1}{20}$; $\frac{1}{10}$; $1\frac{5}{20}$;

$1\frac{1}{3}$

6. Gráfico

7.

a.	N	Z	Q	I
0		√	√	
-10		√	√	
50	√	√	√	
$\frac{22}{7}$				
0,58			√	

b.	N	Z	Q	I
$-\frac{\pi}{3}$				√
$\sqrt{(-25)^2}$	√	√	√	
$\frac{20}{2}$	√	√	√	
$-\frac{1}{\sqrt{8}}$				√

c.	N	Z	Q	I
0,111			√	
$\frac{124}{99}$			√	
$\frac{56}{45}$			√	
3^{-5}			√	

8.

	N	Z	Q	I	R
$-\frac{3}{4}$			√		√
$-\sqrt{169}$		√	√		√
$\frac{2}{3}\pi$				√	√
0,65			√		√
0		√	√		√

9.

a. $0,\overline{5}$
b. 2,8
c. -0,375

10.

a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{4}{3}$
c. $\frac{13}{20}$
d. $\frac{239}{90}$
e. $\frac{13}{10}$
f. $\frac{56}{45}$

11. Los números racionales positivos son mayores a sus opuestos, excepto el cero.

Los números racionales negativos son menores a sus opuestos, excepto el cero.

12.

a. a mayores que 10
b. a menores e iguales que -3
c. a menores que 3 y mayores e iguales que -8
d. 13, 14, 15, 16, 17 ⇒ T∈ (12ºC, 18ºC)

Ejercicios 1.1.1 y 1.1.2: Números reales

1.

a. $-\frac{22}{3}$ e. Indefinido i. 64

b. 19 f. $\frac{5}{6}$ j. $\frac{-1}{3}$

c. $\frac{5}{4}$ g. $\frac{-33}{6}$ k. $\frac{34}{3}$

d. Indefinido h. $\frac{-47}{16}$

2. Tabla

Intervalo	Inecuación
$(-1,5)$	$-1 < x < 5$
$(-11,5)$	$-11 < x < 5$
$(1,\infty)$	$x > 1$
$(-\infty,10)$	$x < 10$
$\left(\frac{2}{5}, 10\right)$	$\frac{2}{5} < x < 10$
$[-5, -1]$	$-5 \leq x \leq -1$
$\left[0, \frac{3}{2}\right)$	$0 \leq x < \frac{3}{2}$
$\left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

3. 584 horas

4. 55 m de profundidad

5. $\frac{29}{45}$

6. $a + 0 = a$
0 ∈ neutro de la suma

7. 1, el que tuvo $\frac{4}{9}$

Ejercicios 1.2: Radicales y exponentes

1.

a. $\frac{1}{25}$ c. $b^{\frac{32}{15}}$

b. $a^{\frac{17}{6}}$ d. $z^{\frac{7}{z}}$

2.

a. $\frac{17}{2}$ b. $\frac{17}{2} \in Q$

3. $-\frac{189}{400}$

4. $\sqrt[5]{a^6}$: $a \in \mathbb{R}$

5.

a. $(x^2 + 1)^{-1} = \frac{1}{x^2 + 1}$ b. 3

6. $625\mu^8$
$\mu = 0$; indefinido
$\mu = 1$; 625

7.

a. $\frac{1}{9}$ b. 1 c. 0

d. No existe e. -59049 f. $-\frac{1}{243}$

8.

a. $10^{\frac{1}{2}}$ b. $p^{\frac{2}{5}}$ c. $5^{\frac{1}{2}}\, xy^{\frac{3}{2}}$

9.

a. -8 b. $\frac{15}{4}$ c. $-\frac{2}{3}$

d. $\frac{4}{5}$ e. $\frac{5a}{c}\sqrt{6b}$ f. $\frac{5}{2}\sqrt{5b}$

g. $-\frac{5x^6}{y^6}$ h. $5xyz^2\sqrt{yz}$ i. $\frac{125}{4}$

j. $-68\sqrt{3}$ k. $-6\sqrt{2} - 32\sqrt{3}$

Ejercicios 1.3: Valor absoluto

1.

a. 2 b. 10 c. 12

d. -1 e. -1

Ejercicios 1.4: Expresiones Algebraicas

1.

a. $3x^2 - 10 + 19$

b. $-t^4 + t^3 - t^2 - 10t + 5$

c. $-z^2 + 13z - 16$

d. $21t^2 - 29t + 10$

e. $z\sqrt{z} - z$

f. $x^2 - x$

g. $8z^2 + 14zt - 15t^2$

h. $a^4 - b^4$

i. $x - y$

j. $x - \frac{1}{y^2}$

k. h^2

l. $1 + 2a^3 + a^6$

m. $1 - 4y + 4y^2$

n. $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$

o. $a - \frac{2\sqrt{a}}{b} + \frac{1}{b^2}$

p. $a^2b^2 - 2 + 1\frac{1}{a^2b^2}$

q. $z - 2z^2 + z^3$

r. $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 2$

s. $x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 - x^2y^5 - xy^6 - y^7$

t. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$

u. $1 + 3a^3 + 3a^6 + a^9$

v. $b^4 - 2b^2 + 1$

w. $t^2 + st\sqrt{st} + \sqrt{st} + s^2$

x. $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

y. $x^3y^3 + 3x^2y^4 + 3xy^5 + y^6$

2.

a. $a - \frac{1}{5}w^2 + \frac{2}{5}w\frac{37}{5}$; coeficiente líder $\frac{4}{5}$

b. polinomio rediseñado

a. $2p^2 + 5p - \frac{37}{4}$; si $p = 0$

3.

a. $x^2 + x^3$

b. $x^2 + 2x + 1$

4. Gráfico

5. $\pi h(R^2 - r^2)$

6.

a. 1055

b. 484

c. 20300

7.

a. $(65 - 14)(65 + 14)$

b. $(1000 - 2)(1000 + 2)$

8.

a. $-2y(1 - 8y)$

b. $(y - 6)(y + 9)$

c. $(a + 2)(a + 2 - 5)$

d. $(4w + 3)(2w - 5)$

e. Primo

f. Primo

g. $(2a + 2b - 1)(a + b + 3)$

h. $(3w + 4)(3w - 4)$

i. $(x + 5)(x + 1)$

9.

a. $(2s - 5t^2)(4s^2 + 2st^2 + 25t^4)$

b. $(a + 4)(a^2 + 1)$

c. $(a^2 + 2)(3a - 1)$

d. $(3a + 1)(1 - 3a^2)$

e. $(y + 1)(y^4 + 1)$

f. $9(x+1)(x-5)$

g. $2p \cdot 2q = 4pq$

h. $\frac{4}{y}$

i. $(b+1)(b-1)(b+2)(b-2)$

j. $(t^2 - 2s)(t^4 + 2st^2 + 4s^2)$

k. $(t^2 + 4)(t^4 + 4t^2 + 16)$

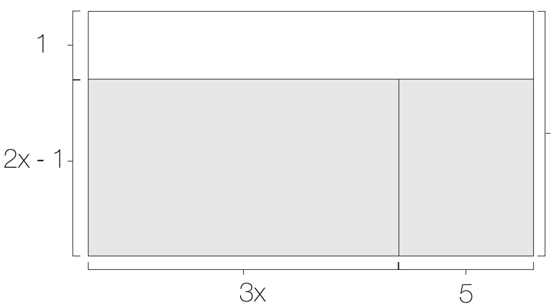
l. $(b+1)(b-1)(b+2)(b-2)$

m. $(b+1)^2\,(b+3)(b-1)$

10.

Expresiones algebraicas	Justifica en el caso de existir error y corrige
$3x(x-2) = 3x - 2$	$3x^2 - 6x$
$3x^2 - 6x = 3x(x-2)$	Correcto
$(A^2 + b^2) = (A+b)^2$	$A^2 + 2Aa + a^2$
$\left(\frac{1}{2} + c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2$	$\frac{1}{4} + c + c^2$
$6x^2 + 7x - 5 = (3x+5)(2x-1)$	Correcto
$(s+w)^2 - z^2 = s^2 + w^2 - z^2$	$s^2 + 2sw + w^2 - z^2$
$\left(\sqrt{r} - \frac{1}{s}\right)\left(\sqrt{r} + \frac{1}{s}\right) = r + \frac{1}{s^2}$	$r - \frac{1}{s^2}$

11.



Ejercicios 1.5: Expresiones algebraicas

1.

a. $x \in \mathbb{R}$

b. $x \neq 4$

c. $x \geq -3$

d. $t \neq -2$

e. $a \neq 0, a \neq 1$

f. $t \neq \frac{3}{2}, t \neq 2$

g. $v \neq -1, v \neq 1$

h. $b < 1$

i. $c \neq 3, c \neq -1$

j. $x \in \mathbb{R}$

2.

a. $\frac{16}{q}p;\ p \neq 0, p \neq 1$

b. $24z;\ z \neq 0$

c. $\frac{2}{3}y;\ y \neq -\frac{1}{2}$

d. $\frac{x-8}{4x+7};\ x \neq -3, x \neq -\frac{7}{4}$

e. $y^2 + 7y + 49;\ y \neq 7$

f. $-\frac{1}{2};\ t \neq 0, t \neq 1$

g. $\frac{3}{5}a;\ a \neq -\frac{1}{2}$

h. $1;\ b \neq -9, b \neq -5, b \neq 2$

i. $\frac{x}{x-6};\ x \neq -8, x \neq -7, x \neq -4, x \neq 6$

j. $\frac{v-3}{v+4};\ v \neq -3, v \neq 6, v \neq 4, v \neq -4$

3.

a. $\frac{14}{x};\ x \neq 0$

b. $\frac{z+9}{z};\ z \neq -4, z \neq -3, z \neq 0, z \neq -2$

c. $\frac{7x+2y}{7x-2y};\ x \neq -\frac{6}{5}y, x, \neq \frac{2}{7}y,\ x \neq \frac{3}{5}y,$
$x \neq \frac{6}{7}y$

d. $y - 11;\ y \neq 11$

e. $33;\ x \neq 1$

f. $\frac{3}{4x};\ x \neq 0, x \neq 4$

g. $\frac{7}{8};\ p \neq q, p \neq -q, p \neq 3$

h. $1;\ x \neq 3$

i. $\frac{a+7}{a};\ a \neq -9, a \neq -6, a \neq 0$

j. $\frac{14}{3}a;\ a \neq 1, a \neq -3$

k. $\frac{a-3}{3};\ a \neq 1, a \neq -3$

4.

a. $\frac{2}{21x}$; $x \neq 0$

b. $\frac{1}{x-10}$; $x \neq -2, x \neq 10$

c. $\frac{2+4x}{x}$; $x \neq 0$

d. $\frac{11}{x}$; $x \neq 0$

e. $\frac{2x-9}{10x-18}$; $x \neq \frac{9}{5}$

f. $\frac{1+x}{x-6}$; $x \neq 6$

g. $-\frac{7}{x+y}$; $x \neq y, x \neq -y$

h. $\frac{8y-7}{(y-2)(y^2-1)}$; $y \neq 2, y \neq 1, y \neq -1$

i. $\frac{x^2-2x+12}{(x^2-16)(x-1)}$; $x \neq -4, x \neq -1, x \neq 4$

j. $\frac{x+2}{x-2}$; $x \neq 3, x \neq -8$

k. $\frac{6x^2+31x-14}{(x+6)(x-1)(x-2)}$; $x \neq -6, x \neq 1, x \neq 2$

l. $\frac{6m^2-12m+7}{(m-2)(m+8)(m-1)}$; $m \neq 1, m \neq 2, m \neq -8$

m. $\frac{2y+1}{11y^2+11y}$; $y \neq 0, y \neq -1$

5.

a. $\frac{5x-6}{x(x-1)}$; $x \neq 0, x \neq 1$

b. $\frac{-(2a+1)}{(a+2)(a-3)}$; $a \neq -2, a \neq 3$

c. $\frac{b^2+b+4}{(b-1)(b+1)^2}$; $b \neq 1$

d. $-xy$; $x \neq 0, y \neq 0$

e. $\frac{x^3}{x^2+y^2}$; $x \neq 0$; $y \neq 0$

f. -1; $a \neq 0, b \neq 0$

6.

a. V

b. V

c. F

7.

$\frac{-1}{a(a+h)}$; $a \neq 0, a \neq -h$

8.

a. $R_1, R_2 \neq 0$ Dominio

$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ Simplificación

b. $\frac{20}{3}$

9.

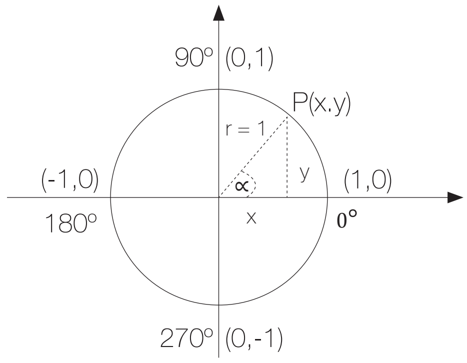
a. $\frac{500 + 6n + 0{,}01n^2}{n}$

b. $n \neq 0$

Capítulo 2

Ejercicios 2.1: Trigonometría

1.



Razón	0°	90°	180°	270°
sen ∝	0	1	0	-1
cos ∝	1	0	-1	0
tan ∝	0	$\nexists$	0	$\nexists$

2.

	Δ ABC		Δ DBC	
	∝	β	β	y_2
tan	a/b	b/a	h/q	q/h
sen	a/c	b/c	h/a	q/a
cos	b/c	a/c	q/a	h/a

3.

	Sen	Cos	Tan
a)	$\frac{4\sqrt{41}}{41}$	$\frac{5\sqrt{41}}{41}$	$\frac{4}{5}$
b)	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
c)	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$

4.

sen ∝	0°	90°	180°	270°	360°
Valor	0	1	0	− 1	0
cos ∝	0°	90°	180°	270°	360°
Valor	1	0	−1	0	1

5.

a. $\text{sen} \propto = \frac{3}{5}$

b. $\cos \propto = \frac{4}{5}$

c. $\tan \propto = \frac{3}{4}$

6.

a. 300°

b. 150° y 330°

c. 225° y 315°

Ejercicios 2.2: Números Complejos

1. Gráficos

2.

a. $|z| = \sqrt{2}$; $\propto = 135°$

b. $|z| = 2$; $\propto = 150°$

c. $|z| = \sqrt{2}$; $\propto = 125°$

3.

a. $(\sqrt{2})135°$ o $(\sqrt{2})\frac{3}{4}\pi$

b. $(2)150°$ o $(2)\frac{5}{3}\pi$

c. $(2\sqrt{2})225°$ o $(\sqrt{2})\frac{5}{4}\pi$

4.

a. $z = 2(\cos 150° + i \sin 150°)$

$$z = 2\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$$

b. $z = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$

$$z = 2\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right)$$

c. $z = (\cos 60° + i \sin 60°)$

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

5.

a. $22 + 10i$

b. $9 + 7i$

c. $-\frac{2}{3} - \frac{2}{5}i$

d. $1 - \frac{15}{2}i$

e. $-10 + i$

f. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

6.

a. $z = \sqrt{41}\ (\cos 38{,}66 + i \sin 38{,}66)$

b. $z = \sqrt{10}\ (\cos 71{,}57 + i \sin 71{,}57)$

7.

a. $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)i$

b. $-1 + 3i$

c. $2 - 4i$

d. $\frac{3}{5} + \frac{19}{5}i$

e. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

f. $\left(\frac{\sqrt{6} - 2}{6}\right) + \left(\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{6}\right)i$

8.

a. $7 - 24i$

b. $-2 + 2i$

9.

a. $\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})+\frac{3}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\,i$

b. $6i$

Capítulo 3

Ejercicios 3.2: Ecuaciones de primer orden y despejes

1.

a. 13

b. $\frac{4}{5}$

c. $-\frac{90}{7}$

d. $-\frac{30}{7}$

e. $\frac{22}{51}$

f. $\frac{51}{8}$

g. $-\frac{5}{13}$

2.

a. $-5;\ x \neq 1, x \neq -1$

b. $\frac{2}{15};\ x \neq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{6}$

c. $-6;\ x \neq 5, x \neq -5, x \neq -\frac{5}{2}, x \neq \frac{5}{2}$

d. $\frac{3}{4};\ x \neq \frac{1}{2}$

3.

a. $H = \frac{v}{LW}$

b. $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$

c. $B = \frac{2A - bh}{h}$

d. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}$

e. $a = \frac{v_f - v_o}{t}$

f. $R_1 = \frac{R \,.\, R_2}{R_2 - R}$

4. La variable pude ser a, b, x; debido a que no son elementos conocidos

5.

a. $7x - 4 = 3x + 8$

b. $(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$

c. $7x = 3x + 12$

d. $7x - 3x = 3x + 12 - 3x$

e. $4x = 12$

f. $\left(\frac{1}{4}\right)4x = 12\left(\frac{1}{4}\right)$

g. $x = 3$

6.

a. $t = \frac{w - 2s}{2}$

b. $y = \frac{b - 5d}{5c - a}$

c. $a = 100\left(\sqrt{(a - p)} - 1\right)$

d. $t = -\frac{5}{2}s$

e. $y = \frac{5b - d}{c - 5a}$

f. $a = 100\left[\pm\left(\frac{A}{c + b} - t\right) - 1\right]$

g. $w = \frac{A - 2sh}{2(s + h)}$

h. $b = \frac{-ax^2 - c}{x}$

i. $d = 16\left(t_1 + t_2 - \frac{r}{1090}\right)^2$

j. $w = \frac{2B^2 - 2shB}{s + 2hB}$

k. $b = \frac{-az^2}{z + c}$

l. $d = \pm\left[\frac{16 \cdot 1090^2}{(r - 1090a_1 - 1090a_2 - 3)^2}\right]$

Ejercicios 3.3: Sistemas de ecuaciones

1.

a. $\{(4-2)\}$

b. $\{(2,3)\}$

c. $\left\{\left(-\frac{32}{7}, -\frac{2}{7}\right)\right\}$

d. $\{(-3,5)\}$

e. $\{(4,-4)\}$

2.

a. $\{(4,3)\}$

b. $\{(\emptyset)\}$

c. $\{(7,-1)\}$

d. $\{(2,3)\}$

e. $\left\{\left(2, \frac{9}{2}\right)\right\}$

3.

a. $\{(2-1)\}$
b. $\{(3,5)\}$
c. $\left\{\left(\frac{5}{4}, 2\right)\right\}$
d. $\{(-2,-3)\}$

4. $i_2 = -\frac{2}{5}A$; $i_3 = -\frac{9}{10}A$

Ejercicios 3.4: Ecuaciones de segundo orden

1.

a. $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{13}$
b. $x_1 = 3;\ x_2 = 5$
c. $x_1 = -5;\ x_2 = 6$
d. $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 2$
e. $x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{1}{2}$
f. $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{13}$
g. $x_1 = -\frac{19}{2};\ x_2 = 0$
h. $x_1 = -8;\ x_2 = 0$

2.

a. $x = -\frac{34}{7};\ x \neq 0$
b. $x = -6;\ x \neq 3$
c. $x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x \neq 0, x \neq 2$
d. $x = \frac{3}{2};\ x \neq -3, x \neq -2$
e. $x = 1;\ x \neq \frac{3}{2}, x \neq -2, x \neq -1$

3.

a. $x_1 = -\frac{7}{4};\ x_2 = 1$
b. $x_1 = -\frac{2}{3};\ x_2 = \frac{1}{2}$
c. $x_1 = \frac{2+3\sqrt{6}}{3};\ x_2 = \frac{2-3\sqrt{6}}{3}$
d. $x \in \mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$
e. $x = 18$
f. $x_1 = 4;\ x_2 = 8$

4.

a. -11; 2 raíces complejas conjugadas
b. -80; 2 raíces complejas conjugadas
c. -84; 2 raíces conjugadas complejas
d. 0; 2 raíces reales iguales
e. 1; 2 raíces reales diferentes
f. 361; 2 raíces reales diferentes
g. -7; 2 raíces complejas conjudas
h. 0;2 raíces iguales

5.

a. $k = \frac{144}{5}$
b. $k = \sqrt{\frac{1}{8}}$
c. $k = 6 \pm 4\sqrt{21}$
d. $k = 12$

6.

a. $x_1 = -4;\ x_2 = -3$
b. $x_1 = 5;\ x_2 = -2$
c. $x_1 = 8;\ x_2 = 3$
d. $x_1 = 4;\ x_2 = 4$
e. $x_1 = -2;\ x_2 = -1$
f. $x_1 = -6;\ x_2 = -6$

7.

a. $x_1 = -1;\ x_2 = 3$
b. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2};\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$
c. $x_1 = \frac{-6+\sqrt{6}}{2};\ x_2 = \frac{-6-\sqrt{6}}{2}$
d. $x_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{2};\ x_2 = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$
e. $x_1 = 5+\sqrt{13};\ x_2 = 5-\sqrt{13}$
f. $x_1 = 5+\sqrt{13};\ x_2 = 5-\sqrt{13}$

Ejercicios 3.5: Aplicaciones de ecuaciones

1.

a. 320 km
b. 9 m y 20 m
c. 10 h y 8 h
d. \$4,2 y \$0,3
e. 108° y 20°
f. \$15 y \$45
g. 5 y 19
h. 5 min
i. \$35 000 y \$65 000
j. 30 cm, 160 cm y 200 cm

2.

a. 12 y −7
b. 21 años
c. 25 m y 30 m
d. 6 m,8 m y 10 m
e. 3 m
f. 45 m y 60 m
g. 5
h. 16 y 18

Ejercicios 3.6: Ecuaciones con valor absoluto

1.

a. $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{3}{2}$
b. $x_1 = 0;\ x_2 = 12$
c. $x = 2;\ x \neq 5$
d. $x = \frac{5}{4};\ x \neq 1$
e. $x_1 = -4;\ x_2 = \frac{20}{3}$
f. $x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = \frac{2}{5};\ x \neq 0$
g. $x_1 = -2 - 2\sqrt{2};\ x_2 = -2 + \sqrt{2};\ x_3 = 2;\ x \neq 1$

Ejercicios 3.7: Ecuaciones exponenciales

1.

a. $x = -3$
b. $x = \frac{6}{5}$
c. $x_1 = 2;\ x_2 = 3$
d. $x = \frac{15}{22}$
e. $x = -3$
f. $x = 3$
g. $x = 4$
h. $x = 2$
i. $x = 1$
j. $x_1 = 0; x_2 = 2$
k. $x_1 = 1; x_2 = 2$
l. $x = 0$
m. $x_1 = -2; x_2 = 1$
n. $x_1 = 0; x_2 = 1$
o. $x_1 = 1\ ;\ x_2 = 3$
p. $x = -1$

Ejercicios 3.8: Ecuaciones logarítmicas

1.

a. $3^4 = 81$
b. $10^{-1} = 0{,}1$
c. $4^2 = 16$
d. $e^x = 3$
e. $2^3 = x + 1$

2.

a. $\log_2 32 = 5$
b. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
c. $\log 0{,}01 = -2$
d. $\ln 4 = x$
e. $\log s = r$

3.

a. $\log 2 + \log a + \log b$
b. $\log 3 + \log a - \log 3$
c. $\log 2 + 2 \log a - \log 3$
d. $5 \ln a + 4 \ln b$
e. $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b$
f. $\ln 5 + 2 \ln a + 4 \ln b + \frac{1}{2} \ln c - \ln 2 - \ln x - \ln y$
g. $4 \log a + 2 \log c - 4 \log 2$
h. $\log 7 + \log a + 3 \log b + \frac{1}{2} \log 5 + \log c$
i. $\frac{3}{2} \log_2 x + \frac{3}{2} \log_2 y - \frac{3}{2}$
j. $\frac{1}{2} \ln 10 + \frac{1}{2} \ln a - \frac{5}{2} \ln b$

4.

a. $\log ab$
b. $\log \frac{x}{y}$
c. $\log \sqrt{xy}$
d. $\log \frac{a}{xy}$
e. $\log \frac{pq}{rs}$
f. $\log 24$
g. $\log \frac{a+b}{a-b}$
h. $\log (x-1)$
i. $\log (a+5)$
j. $\log \frac{\sqrt{a}\,\sqrt[4]{c}}{\sqrt[3]{d}}$
k. $\log \frac{a^{\frac{6}{5}} p^{\frac{10}{3}}}{q^{\frac{4}{5}}}$

5.

a. $x = 4$
b. $x = -1$
c. $x = \frac{1}{8}$
d. $x = 5$
e. $x = \pm 2\sqrt{2}$
f. $x = 3$
g. $x = 16$
h. $x = \pm 2$
i. $x = 3$ y $x = -6$
j. $x = 3$
k. $x = 1$
l. $x = \frac{33}{47}$
m. $x = 0$

6. Gráfico

Aplicaciones

a. 100
b. 482, 998, 1168
c. 1200

Capítulo 4

Ejercicios 4.2, 4.3, 4.4, 4.5: Desigualdades

1.

a. $\sqrt{2}$, 2, 4
b. 4
c. $-2, -1, 2, 4$
d. 1, $\sqrt{2}$, 2, 4
e. 1, $\sqrt{2}$, 2, 4

2.

a. $x \leq 2$
b. $x \geq 7$
c. $x \leq \frac{5}{2}$
d. $x < -\frac{1}{3}$
e. $3 \leq x \leq \frac{20}{3}$
f. $\frac{9}{2} \leq x < 5$
g. Solución falsa
h. $\frac{15}{2} < x \leq \frac{21}{2}$
i. $\frac{13}{6} \geq x \geq \frac{11}{13}$

3.

a. $-5 < x < 3$

b. $x \leq -\frac{7}{4}$ v $x \geq 0$

c. $-5 \leq x \leq 0$

d. $x \leq -1$ v $x \geq \frac{1}{2}$

e. $-1 \leq x \leq 4$

f. $x \leq -3$ v $x \geq 6$

g. $-2 < x < 2$

h. $-2 \leq x \leq 1$ v $x \geq 0$

i. $x \leq -2$ v $0 \leq x \leq 2$

j. $x < -1$ v $x \geq 3$; $x \neq -1$

k. $x < 2$; $x \neq 2$

l. $x < -3$ v $x > -\frac{5}{3}$; $x \neq 3$

m. $x < 5$ v $x \geq 16$; $x \neq 5$

n. $-11 \leq x < 1$ v $x \geq 7$; $x \neq 1$

o. $-2 \leq x < -1$ v $0 < x \leq 1$; $x \neq 0, x \neq -1$

p. $x < -1$ v$-\frac{2}{3} < x < 0$; $x \neq -1$

q. $-2 \leq x < 0 \vee 1 < x \leq 3$; $x \neq 0, x \neq 1$

r. $x \leq -2$ v$-1 < x \leq 9$; $x \neq -1$

s. $x < -3$ v $2 < x < \frac{7}{2}$; $x \neq 2$; $x \neq -3$

t. $x < -2$ v $-\frac{3}{2} \leq x < -1$; $x \neq -2, x \neq -1$

4.

a. Definida: $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
Indefinida: $x = 3$
Positiva: $x \leq \frac{5}{3}$ v $x > 3$
Negativa: $\frac{5}{3} < x < 3$

b. Definida: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$
Indefinida: $x = \frac{3}{2}$
Positiva: $x \leq -3$ v $x > \frac{3}{2}$
Negativa: $-3 < x < \frac{3}{2}$

c. Definida: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
Indefinida: $x = -4$
Positiva: $-4 < x \leq -1$ v $x \geq \frac{1}{2}$
Negativa: $x < -3$ v $-1 < x < \frac{1}{2}$

d. Definida: $x \geq 0$
Indefinida: $x < 0$
Positiva: $x \geq 0$
Negativa: $\emptyset$

e. Definida: $-8 \leq x < 7$ v $x > 7$
Indefinida: $x < -8$ v $x = 7$
Positiva: $-8 \leq x \leq 4$ v $x > 7$
Negativa: $4 < x < 7$

f. Definida: $3 \leq x < 8$ v $x > 8$
Indefinida: $x < 3$ v $x = 8$
Positiva: $3 \leq x < 8$ v $x > 8$
Negativa: $\emptyset$

4.

a. $[-4,4]$

b. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

c. $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

d. $\left(-\infty, \frac{18}{5}\right) \cup \left(-\frac{22}{5}, \infty\right)$

e. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

f. $\left[\frac{13}{5}, \frac{17}{5}\right]$

g. $(-4,8)$

h. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

i. $\left(-\infty, -\frac{39}{7}\right) \cup \left(-\frac{31}{7}, \infty\right)$

j. $\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$

k. $(-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{9}{10}\right]$

l. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

6.

a. $|x| > 5$

b. $|x| < \frac{1}{2}$

c. $x \in \emptyset$

d. $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{3}{2}$

e. $|2x - 2| \leq 2$

7.

a. Positiva: $x < -1$ v ≥ 3
Negativa: $-1 < x < 3$

b. Positiva: $-2 \leq x < 0$ v $x \geq 2$
Negativa: $x < -2$ v $x > 2$

c. Positiva: $x < -3$ v $x \geq -\frac{5}{3}$
Negativa: $-3 < x < -\frac{5}{3}$

d. Positiva: $-3 \leq x \leq -1$ v $x \geq 2$
Negativa: $x < -3$ v $-1 < x < 2$

e. Positiva: $x \leq -2$ v $x \geq 1$

f. Negativa: $-2 < x < 1$

8.

a. $10 \leq x \leq 35$

b. $x > 200$ Se hizo para un día de recorrido

c. $12\,000 \leq m \leq 14\,000$

d. $62{,}4 \leq h \leq 74$

e. $20 \leq x \leq 40$

f. $100\,000 \geq d \geq 20\,000 \vee$
$-100\,000 \leq d \leq -20\,000$

g. $x > 30$

Capítulo 5

Ejercicios 5.1, 5.2, 5.3, 5.4: Introducción a la geometría analítica y la recta

1.

a. $F(-3, 3)$

b. $G(-2, 1)$

c. $H(-2, -3)$

d. $I(-1, -1)$

e. $J(2, -1)$

f. $K(1, 2)$

g. $L(2,4)$

h. $M(3, -3)$

i. $N(1, -2)$

2.

a. Distancia $= \sqrt{17}$; Punto medio $= \left(0, \frac{5}{2}\right)$

b. Distancia $= \sqrt{41}$; Punto medio $= \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

3.

a. $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$

b. Graficar los puntos medios $\left(0, -\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c. $B(11,13)$

d. $P = 14{,}47$

e. $P = 10{,}67$

f. $AB = 6{,}32$; $BC = 4{,}47$; $CA = 4{,}47$
$AB^2 = BC^2 + CA^2$
$6{,}32^2 = 4{,}47^2 + 4{,}47^2$
$40 = 20 + 20$
$40 = 40$

g. **A** más cercano al origen

4.

a. $-\frac{2}{5}$

b. 0

c. 3

d. Indeterminación

e. $-\frac{3}{4}$

5.

a. $m_1 = -2$

b. $m_2 = \frac{1}{2}$

c. $m_3 = 0$

d. $m_4 = -\frac{1}{2}$

e. $m_5 = 3$

6.

a. $y = \frac{1}{2}x + 3$

b. $y = 2x + 4$

c. $y = 2x + 13$

d. $y = -2x - 16$

e. $y = \frac{5}{6}x + \frac{17}{6}$

7.

a. $y = \frac{4}{3}x$

b. $y = -2x + 10$

c. $y = x - 8$

8.

a. $y = \frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$

b. $y = 2x - 2$

c. $y = \frac{1}{10}x - \frac{2}{3}$

d. $y = 3$

e. $x = 4$

f. $y = -\frac{1}{2}x + 7$

g. $y = 5$

h. $y = -\frac{6}{11}x - \frac{13}{11}$

i. $y = -\frac{1}{2}x - 13$

j. $y = \frac{14}{24}x - \frac{91}{24}$

k. $y = -\frac{10}{3}x + \frac{41}{3}$

9.

a. $A = 6$

b. $k = -2$

c. $k = -\frac{7}{2}$

10.

a. Graficar los puntos:
$P_1\,(0,6)$ y $P_2\,(3,5)$

b. Graficar los puntos:
$P_1(5,-5)$ y $P_2\,(-3,1)$

11.

a. L_3 es perpendicular a L_1 y L_2

b. L_1 y L_2 son paralelas

- L_1; $y = x - 3$
- L_2; $y = x - 5$
- L_3; $y = -x + 3$

Aplicaciones

1.

a. $y = 3\,000\,x + 50\,000$

b. $y = 65\,000$

2.

a. Gráfico

b. Gráfico

c. $y = -\frac{1}{2}x + 300$

d. $y = 233{,}65$

Trayectorias profesionales

Washington Álvaro Lugo

Realizó sus estudios de tercer nivel en Matemáticas y Físicas en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador. Completó su maestría en Docencia Universitaria e Investigación. Experto en Educación Virtual a través de la Fundación para la actualización tecnológica de Latinoamérica. Tiene una experiencia en la docencia de 25 años, tanto a nivel de colegios como de universidades. Es docente a tiempo completo en la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Las Américas y colabora con los estudiantes del Instituto de Investigación Educación y Promoción Popular del Ecuador (INEPE). Ha dirigido varios proyectos de tesis así como la capacitación a docentes de comunidades indígenas de varias provincias del Ecuador.

Mónica Lorena Calle Jiménez

Realizó sus estudios de tercer nivel en Electrónica y Control de la Universidad Politécnica Nacional, sus estudios de cuarto nivel en Docencia y Administración Educativa en la Universidad Tecnológica Indo América. Instructora profesional en el área de ciencias básicas para Tecnologías e Ingenierías en la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA). Ha sido coordinadora del área de Electricidad en el Servicio Ecuatoriano de Capitación Profesional, trabajando con empresas públicas, privadas, sector vulnerable y dirigiendo tesis de tecnólogos en áreas técnicas. Docente en Instituciones de educación superior durante 12 años, actualmente es docente a tiempo completo de la Universidad de Las Américas.

Referencias

Arjona, A. (2017). «Matemáticas recreativas y educativas». Recuperado de: http://matematicasrecreativasyeducativas.blogspot.com/2017/02/lectura-historia-de-los-numeros-reales.html#.W6T9R2hKjlU.

Biografías y Vidas (2004-2018). Obtenido de: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Delshams A. y Massa M. R. (2015). *Euler y la geometría análitica.* Barcelona: Universidad Politécnica de Catalunya.

Demana, Waits, Foley, Kennedy y Blitzer. (2015). *Matemáticas universitarias*. México DF, México: Pearson Educación.

DivulgaMAT. Recuperado de: el 15 de 06 de 2017, de www.google.com: http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Dedekind.asp.htm.

Fernández, A. (2015). *Argumentos trigonométricos*. Recuperado de: http://perso.wanadoo.es/amiris/index.html

Galván, G. (2013). «Historia de las matemáticas en el antiguo Egipto». Recuperado de: http://matematicasantiguoegipto.blogspot.com/2013/05/pruebasdel-conocimiento-matematico-del.html.

García, J. (2011). *Guía de matemáticas introducción al cálculo.* Quito, Ecuador: Udla.

Geogebra. (03 de 04 de 2017). Ilustrador gráfico. Recuperado de: https://Geogebra.softonic.com/.

Guelli, O. (1993). *Contando una historia de la Matemática*. España: Ática.

Haeussler, Paul y Wood. (2015). *Matemáticas para la administración y economía.* México DF, México: Pearson Educación.

Ifrah, G. (2000). *Historia universal de las cifras.* Madrid, España: UNIGRAF, S.L.

Lous Leithold, c. e. (1982). *El cálculo y geometría analítica.* México: Cámara nacional de la industria editorial.

Martinez, C. (2014). «Geometría analítica: qué estudia, historia, aplicaciones». Recuperado de: https://www.lifeder.com/que-estudia-geometria-analitica/.

Matemáticas, R. (s.f.). Recuperado el 24 de 03 de 2017, de Recursos Matemáticas: http://thales.cica.es/rdRecursos/rd98/Matematicas/14/historia.html.

Mendoza, Francisco. (2001). *Introducción a los números complejos.* Recuperado de: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/complejos.pdf.

Plataforma virtual MyMathlab. (28 de 01 de 2016). Recuperado de: www.mymathlab/espanol.

Portafoliocollleguealgebra. (27 de 01 de 2016). Recuperado de: https://sites.google.com/site/portafoliocolleguealgebra/.

Schmid y Weidig (2015). *Matemáticas para todos*. Versión adaptada y actualizada. Lima, Perú: Instituto Apoyo.

Silvia Bernardis, Liliana Nitti, Sara Scaglia. (2017). SCIELO. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262017000300161.

Stewart, Lothar, Saleem (2009). *Precálculo matemáticas para el cálculo*. México: Cengage Learning Editores, S.A.

Swokowski y Cole (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México DF, México: Edamsa.

Introducción al cálculo. Guía de ejercicios
se terminó de editar
en Quito, Ecuador,
el mes de septiembre de 2019,
bajo la marca

udla
ediciones

siendo canciller el Dr. Carlos Larreátegui Nardi