



ruta

La ingeniería enfrenta importantes retos en las nuevas sociedades. Se integra a una infinidad de áreas profesionales para solucionar múltiples problemas del mundo moderno. Sin embargo, no se la puede concebir sin los fundamentos básicos para su comprensión y aplicación, pues ello conduciría a prácticas empíricas que distan de la ciencia.

Fundamentos de mecánica para ingeniería es el primero de un conjunto de libros que se involucran con las ciencias de la ingeniería, para afrontar los desafíos de su enseñanza y los principios científicos que la rigen. Así, podremos hacer desarrollos aptos para la industria.

Dentro podrán encontrar 18 capítulos con contenido estructurado según el nivel de dificultad, de tal manera que en los preliminares habrá material de muy fácil entendimiento, pero a medida que vamos adentrándonos en el tema los capítulos tendrán un mayor nivel de complejidad y rigor, para alcanzar el aprendizaje deseado.

Incorporamos, también, ejercicios resueltos y ejercicios por resolver, que de seguro serán una herramienta útil para el progreso de la asignatura, y para las futuras aplicaciones que puedan hacer como profesionales de la ingeniería.

Repasaremos, además, las principales teorías científicas de la física, que fortalecen la mecánica y enriquecen la ingeniería. Es decir, este es un libro didáctico, práctico y de fácil utilización para estudiantes y docentes, que añade un enfoque ilustrativo y creativo que permite la fácil comprensión de los conceptos.

Adicionalmente, este texto cuenta con cinco prácticas de laboratorio muy útiles para integrar los conceptos a la aplicación física. Estas prácticas complementan el aprendizaje y permiten integrar habilidades y destrezas en el uso de equipos de laboratorio, mediciones y cálculos de un proceso real.

Fundamentos de mecánica para ingeniería incluye todos los aspectos científicos y técnicos que fortalecen la ciencia de la ingeniería, y que dan forma a las aplicaciones y desarrollos tecnológicos, los cuales harán posibles nuevos avances científicos en distintas áreas.



FUNDAMENTOS DE MECÁNICA PARA INGENIERÍA

TEORÍA Y PRÁCTICA

FUNDAMENTOS DE MECÁNICA PARA INGENIERÍA

Omar Flor
Franyelit Suárez
Luis Rosales

ISBN: 978-9942-779-43-4



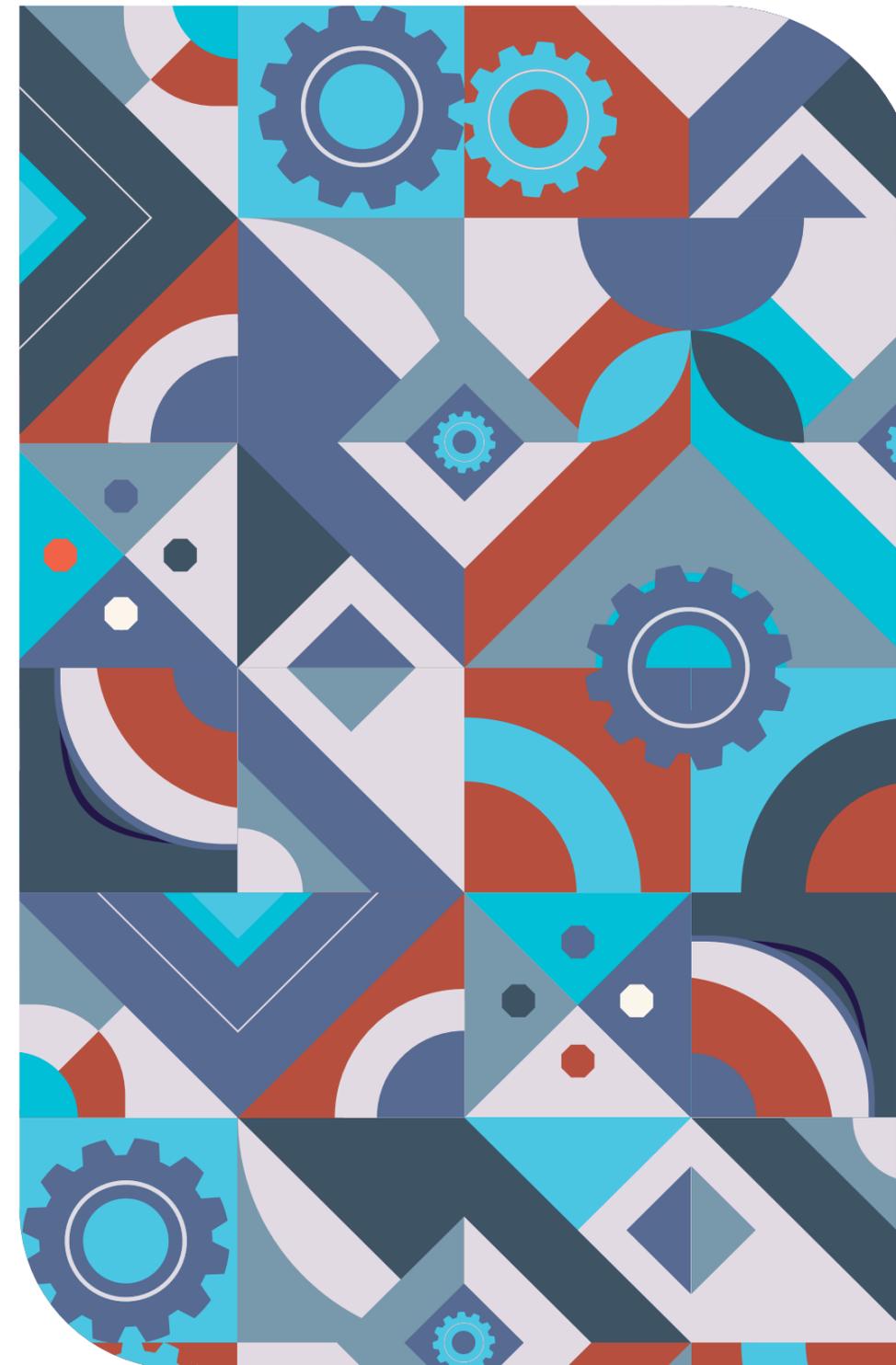
9 789942 779434

udla
EQUADOR

udla

ruta

udla
ediciones





La colección Ruta comprende libros de estudio, cuadernos de ejercicios y actividades, guías para docentes, textos didácticos y cualquier otro material de apoyo que enriquezca el proceso enseñanza-aprendizaje de estudiantes de educación media y superior. Fue creada con el propósito de acompañar a sus lectores en el camino del aprendizaje continuo.

Fundamentos de mecánica para ingeniería: teoría y práctica

© Omar Flor

© Franyelit Suárez

© Luis Rosales

© Universidad de Las Américas

Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas

Campus UDLAPARK

Redondel del Ciclista, Antigua Vía a Nayón, Quito EC 170124

www.udla.edu.ec

Facebook: @UDLAEcuador

Quito, Ecuador

Primera edición: septiembre, 2021

EDITORA

Susana Salvador Crespo

Coordinación Editorial UDLA

CUIDADO DE LA EDICIÓN

Fabrizio Cerón Rivas

Coordinación Editorial UDLA

CORRECCIÓN Y ESTILO

La Caracola

DISEÑO DE CUBIERTA

Juan Villacís / Estudio Nueve

DISEÑO

Nathalie Rueda / Estudio Nueve

Y

DIAGRAMACIÓN

CASA EDITORIAL

UDLA Ediciones

ISBN: 978-9942-779-43-4

Gracias por respetar las leyes del copyright al no reproducir, escanear ni distribuir ninguna parte de esta obra, sin la debida autorización. Al hacerlo está respetando a los autores y per-mitiendo que la UDLA continúe con la difusión del conocimiento.



FUNDAMENTOS DE MECÁNICA PARA INGENIERÍA

TEORÍA Y PRÁCTICA

Franyelit Suárez

Omar Flor

Luis Rosales

ruta | *udla.*
ediciones

FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS AGROPECUARIAS

udla.



Contenido

Capítulo 1

3 Fundamentos de mecánica para ingenieros

- 4 Mecánica de cuerpos rígidos
 - 4 Estática
 - 4 Dinámica
- 5 Mecánica de cuerpos deformables
- 5 Mecánica de fluidos
 - 5 Estudio de fluidos compresibles
 - 5 Estudio de fluidos incompresibles
- 6 Evolución e historia de la mecánica
- 12 Desarrollos en automoción
- 14 Desarrollos en aviación
- 16 La era espacial

Capítulo 2

23 Importancia de la mecánica

- 24 Mecánica clásica
- 24 Mecánica vectorial
- 25 Mecánica analítica
- 25 Mecánica cuántica
- 25 Mecánica relativista
 - 25 Teoría de la relatividad espacial
 - 25 Teoría de la relatividad general
 - 25 Teoría cuántica de campos
- 25 Mecánica de fluidos
- 25 Mecánica de suelos
- 26 Mecánica de la fractura
- 26 Mecánica de materiales



Capítulo 3

29 Definiciones básicas

- 29 Espacio
- 30 Masa
- 30 Tiempo
- 31 Aceleración de la gravedad
- 31 Sistema Internacional de Unidades (SI)
- 32 Movimiento general
- 32 Movimiento relativo
- 33 Movimiento absoluto
- 33 Trayectoria

Capítulo 4

35 Importancia de las mediciones y sus unidades

- 35 Magnitudes físicas
 - 36 Fundamentales
 - 36 Derivadas
 - 38 Suplementarias
- 39 Medición
 - 39 Medir
 - 39 Valor patrón
 - 39 Elementos del sistema de medida
 - 39 Medidas directas
 - 39 Medidas indirectas
- 40 Sistema de unidades
 - 40 El sistema absoluto
 - 40 El sistema técnico
- 40 Múltiplos y submúltiplos del SI



Fundamentos de mecánica para ingeniería

Teoría y práctica

- 41 Sistema de coordenadas en el plano
- 41 Coordenadas rectangulares
- 43 Coordenadas polares
- 44 Coordenadas geográficas
- 45 El triángulo rectángulo
- 46 Resolución del triángulo rectángulo
 - 46 El teorema de Pitágoras
 - 47 Funciones trigonométricas
- 49 Conversión de coordenadas
 - 49 Conversión de coordenadas rectangulares a polares
 - 50 Conversión de coordenadas polares a rectangulares
- 52 Análisis dimensional
- 54 Ejercicios propuestos de sistemas de unidades
- 55 Ejercicios propuestos de plano geométrico

Capítulo 5

59 Experimentación científica y cálculo de errores

- 59 Experimentación científica
 - 60 Proyecto simple: hagamos un reloj solar práctico
 - 60 ¿Cómo hacer un reloj solar?
- 61 Historia de los métodos experimentales
- 62 Notación científica
 - 63 ¿Cómo escribir números en notación científica?
- 67 Operaciones con notación científica
 - 67 Adición y sustracción
 - 69 Multiplicación y división
- 71 Ejercicios propuestos

Capítulo 6

75 Errores en la medición

- 76 Exactitud
- 76 Precisión



- 77 Tipos de errores en la medición
 - 77 Error aleatorio
 - 77 Error sistemático
 - 78 Error absoluto
 - 78 Error relativo
 - 78 Resolución
- 81 Ejercicios propuestos de cálculo de errores

Capítulo 7

83 Gráficas y funciones

- 83 Historia
- 84 Sistemas de coordenadas espaciales
- 85 Construcción de una gráfica
- 86 Proporcionalidad directa
- 86 Proporcionalidad inversa
- 88 Otro tipo de proporcionalidad
 - 88 Relación gráfica de línea recta
 - 89 Proporcionalidad cuadrática
- 91 Ejercicios propuestos de análisis de gráficas
- 92 Ejercicios de proporcionalidad
- 95 Nociones básicas de funciones
 - 95 Dominio
 - 95 Codominio
 - 95 Rango
- 96 Expresiones de una función

Capítulo 8

99 Repaso de álgebra vectorial

- 99 El vector
- 100 Clasificación de los vectores
 - 100 Vectores fijos o ligados
 - 100 Vectores libres



Fundamentos de mecánica para ingeniería

Teoría y práctica

- 100 Vectores deslizantes
- 101 Vectores iguales
- 101 Vector negativo
- 101 Vectores colineales
- 102 Vectores concurrentes
- 102 Vectores coplanares
- 102 Vectores paralelos
- 102 Vectores perpendiculares
- 102 Operaciones con vectores
 - 102 Suma o adición de vectores
 - 103 Método analítico
 - 104 Método del paralelogramo
 - 105 Método del triángulo
 - 107 Producto de un escalar por un vector
 - 107 Producto punto (escalar) de dos vectores
 - 111 Producto vectorial de dos vectores
- 115 Ejercicios propuestos de vectores

Capítulo 9

119 Resultantes de varias fuerzas concurrentes

- 120 Descomposición de una fuerza en sus componentes
- 123 Ley de senos
- 123 Ley de cosenos
- 127 Fuerzas en el espacio
- 128 Vectores unitarios
- 131 Ejercicios propuestos

Capítulo 10

135 Diagramas de cuerpo libre

- 135 Fuerzas mediante contacto
- 135 Fuerzas de acción a distancia
- 136 Fuerza aplicada



- 136 Fuerza normal
- 136 Atracción de la fuerza de gravedad (peso)
- 137 Fuerza de rozamiento
- 137 Fuerza de tensión
- 137 Fuerza elástica
- 137 Fuerza de resistencia del aire
- 143 Ejercicios propuestos

Capítulo 11

147 **Leyes fundamentales de la mecánica newtoniana**

- 150 Primera ley
- 150 Segunda ley
- 151 Tercer ley
- 151 Ley de la gravitación universal
- 163 Ejercicios propuestos de las leyes de Newton

Capítulo 12

169 **Equilibrio de una partícula en el espacio**

- 175 Ejercicios propuestos de equilibrio de una partícula en el espacio

Capítulo 13

179 **Mecánica de cuerpos rígidos**

- 180 Sistemas de representación de posición
- 181 Sistema de coordenadas cartesianas
- 181 Sistema de coordenadas cartesianas espaciales
- 183 Sistema de coordenadas polares
- 183 Sistema de coordenadas cilíndrico
- 184 Sistema de coordenadas esférico
- 185 Sistemas de representación de orientación en el espacio
- 185 Rotación X, Y, Z
- 185 Ángulos RPY



- 186 Ángulos de Euler Z-Y-X
- 188 Ángulos de Euler Z-Y-Z
- 189 Posición y orientación de un objeto en el espacio
- 193 Rotación en el espacio
- 196 Matriz de Transformación
- 199 Ejercicios propuestos

Capítulo 14

201 **Sistemas equivalentes de fuerza**

- 203 Principio de transmisibilidad
- 204 Momento de una fuerza respecto a un punto
- 208 Momento de una fuerza respecto de un eje
- 209 Teorema de Varignon
- 212 Ejercicios propuestos

Capítulo 15

215 **Equilibrio de cuerpos rígidos**

- 216 Distribuidas
 - 216 Cargas distribuidas en elementos horizontales
 - 217 Cargas distribuidas en elementos inclinados
- 219 Equilibrio en dos dimensiones
- 219 Estructuras estáticamente determinadas (isostáticas)
- 220 Estructuras estáticamente indeterminadas (hiperestáticas)
- 223 Ejercicios propuestos

Capítulo 16

225 **Centroides y centros de gravedad**

- 226 Centro de gravedad de cuerpos bidimensionales
- 230 Centro de gravedad en superficies planas y alambres compuestos
- 236 Ejercicios propuestos



Capítulo 17

239 Centroides y centros de gravedad

- 240** Armaduras
- 240** Armazones
- 241** Mecanismos
- 242** Análisis por el método de nodos
- 247** Método gráfico de Cremona-Maxwell
- 252** Ejercicios propuestos

Capítulo 18

255 Vigas

- 256** Fuerza cortante en vigas
- 263** Ejercicios propuestos
- 264** Referencias



Prácticas de Laboratorio

Práctica 1

267 Fuerza de roce

- 267 Objetivo general
- 267 Objetivos específicos
- 267 Fundamentos teóricos
 - 267 Fuerzas de fricción o roce
- 268 Tipos de fuerzas de fricción o roce
 - 268 Fuerza de fricción estática
 - 268 Fuerza de fricción fluida
 - 269 Fuerza normal
- 271 Ángulo de rozamiento
- 272 Equipos y materiales
- 272 Montaje de la práctica
- 274 Procedimiento para la recolección de los datos
 - 274 Parte I (utilizando portapesas) [3]
 - 274 Parte I.II (utilizando dinamómetro)
 - 275 Parte II
- 277 Cálculos
- 278 Características del informe técnico

Práctica 2

281 Péndulo simple

- 281 Objetivo general
- 281 Objetivos específicos
- 281 Fundamentos teóricos
- 283 Equipos y materiales
- 283 Montaje de la práctica
- 284 Procedimiento para la recolección de los datos
- 285 Actividades
- 288 Características del informe técnico
- 288 Referencias



Práctica 3

291 Caída libre

- 291 Objetivo general
- 291 Objetivos específicos
- 291 Fundamentos teóricos
- 293 Equipos y materiales
- 293 Montaje de la práctica
- 294 Procedimiento para la recolección de los datos
- 295 Cálculos
- 297 Características del informe técnico
- 297 Referencias

Práctica 4

299 Conservación de momento lineal

- 299 Objetivo general
- 299 Objetivos específicos
- 299 Fundamentos teóricos
 - 299 Conservación del momento lineal
 - 301 Conservación del momento lineal de un sistema de partículas
 - 302 Colisiones
 - 302 Conservación del momento lineal
 - 303 Conservación de la energía cinética
 - 305 Choques bidimensionales
- 306 Equipos y materiales
- 307 Montaje de la práctica
- 308 Procedimiento para la recolección de los datos
 - 308 Parte I
 - 309 Parte II
- 310 Cálculos
- 310 Características del informe técnico
- 310 Referencias



Práctica 4

313 Conservación de la energía mecánica

- 313** Objetivo general
- 313** Objetivos específicos
- 314** Fundamentos teóricos
 - 314** Energía mecánica
 - 314** Conservación de la energía mecánica
 - 314** Energía cinética de un cuerpo rígido
 - 317** Energía potencial
 - 317** Energía potencial gravitatoria
 - 317** Energía potencial elástica
 - 318** Momento de inercia
- 319** Equipos y materiales
- 320** Montaje de la práctica
- 321** Procedimiento para la recolección de los datos
 - 321** Parte I
 - 322** Parte II
- 323** Cálculos
- 324** Características del informe técnico
- 324** Referencias



Índice de imágenes

3	Imagen 1.1	Sir Isaac Newton (1643-1727)
5	Imagen 1.2	Armas prehistóricas
6	Imagen 1.3	Arquímedes de Siracusa
6	Imagen 1.4	Herón de Alejandría
8	Imagen 1.5	Leonardo da Vinci
8	Imagen 1.6	Claudio Ptolomeo
9	Imagen 1.7	Johannes Kepler
9	Imagen 1.8	Galileo Galilei
10	Imagen 1.9	Dennis Papin
11	Imagen 1.10	Thomas Savery
11	Imagen 1.11	Thomas Newcomen
12	Imagen 1.12	James Watt
13	Imagen 1.13	Henry Ford
15	Imagen 1.14	Hermanos Wright
18	Imagen 1.15	GIRD 09
19	Imagen 1.16	Globos sonda
21	Imagen 1.17	Satélite soviético
60	Imagen 5.1	Reloj solar analemático
75	Imagen 6.1	El patrón de medida
76	Imagen 6.2	Diferencias entre exactitud y precisión
77	Imagen 6.3	Exactitud y precisión simultáneas



Índice de figuras

4	Figura 1.1	Sólido rígido
4	Figura 1.2	Cuerpo deformable
30	Figura 3.1	Intuitiva de espacio: (a) partícula, (b) cuerpo
39	Figura 4.1	Elementos del sistema de medida
42	Figura 4.2	Cuadrantes en el plano
43	Figura 4.3	Puntos en el plano
44	Figura 4.4	Puntos en el plano polar
45	Figura 4.5	Ubicación de puntos en coordenadas geográficas
45	Figura 4.6	El triángulo rectángulo
46	Figura 4.7	Elementos del triángulo rectángulo
47	Figura 4.8	Ángulos del triángulo rectángulo
48	Figura 4.9	Triángulo rectángulo, ejemplo 4
49	Figura 4.10	Teorema de Pitágoras
51	Figura 4.11	Ubicación de un punto en el plano
53	Figura 4.12	Conversión de unidades
55	Figura 4.13	Plano cartesiano
55	Figura 4.14	Plano tridimensional
56	Figura 4.15	Gráfica ax-t
56	Figura 4.16	Gráfica Vx-t
84	Figura 7.1	La recta real
84	Figura 7.2	Espacio tridimensional
85	Figura 7.3	Gráfica velocidad - tiempo
86	Figura 7.4	Proporcionalidad directa
87	Figura 7.5	Proporcionalidad inversa
89	Figura 7.6	Gráfica velocidad-tiempo del ejemplo
90	Figura 7.7	Gráfica de proporcionalidad cuadrática
91	Figura 7.8	Gráfica velocidad-tiempo
91	Figura 7.9	Relación aceleración-tiempo
93	Figura 7.10	Gráfica de proporcionalidad
94	Figura 7.11	Gráfica de proporcionalidad directa
95	Figura 7.12	Representación gráfica de una función
100	Figura 8.1	Componentes de un vector



101	Figura 8.2	Clasificación de los vectores según su punto de aplicación
101	Figura 8.3	Clasificación de los vectores relativa a su posición
103	Figura 8.4	Ejemplo de vectores en el plano y en el espacio
103	Figura 8.5	Componentes que suman un vector
104	Figura 8.6	Método del paralelogramo
105	Figura 8.7	Ejemplo del método del paralelogramo
106	Figura 8.8	Método del triángulo
106	Figura 8.9	Método del polígono
107	Figura 8.10	Ejemplo del método del triángulo
108	Figura 8.11	Producto escalar por un vector
108	Figura 8.12	Ejemplo de producto escalar por un vector
109	Figura 8.13	Ángulo formado por dos vectores
112	Figura 8.14	Regla de la mano derecha
113	Figura 8.15	Posibilidades de la regla de la mano derecha
114	Figura 8.16	Producto cruz de vectores
119	Figura 9.1	Fuerzas concurrentes sobre la partícula A
120	Figura 9.2	Descomposición de una fuerza
121	Figura 9.3	Componentes de la fuerza en ejes X y Y
122	Figura 9.4	Ejemplo para descomposición de fuerzas
122	Figura 9.5	Ejemplo de punto de concurrencia de las fuerzas
124	Figura 9.6	Ejemplo de ley de senos
124	Figura 9.7	Parámetros de la ley de senos
126	Figura 9.8	Ejemplo de aplicación para ley de senos
126	Figura 9.9	Solución con ley de senos
127	Figura 9.10	Ejemplo de fuerza en el espacio
128	Figura 9.11	Representación de vectores unitarios
130	Figura 9.12	Ejemplo de fuerzas en el espacio
131	Figura 9.13	Figura del ejercicio 3
139	Figura 10.1	Ejemplo de reacciones en empotramiento
140	Figura 10.2	Ejemplo para DCL
140	Figura 10.3	DCL en plano inclinado
141	Figura 10.4	DCL en cuerpos en contacto
142	Figura 10.5	DCL en poleas
143	Figura 10.6	Ejemplos de DCL, parte 1



144	Figura 10.7	Ejemplos de DCL, parte 2
148	Figura 11.1	Velocidades de variable magnitud y mismo sentido
149	Figura 11.2	Velocidades de igual módulo y diferente sentido
149	Figura 11.3	Velocidades de igual magnitud y sentidos contrarios
152	Figura 11.4	Ley de gravitación universal
152	Figura 11.5	Gráfico del ejemplo 44
153	Figura 11.6	DCL del ejemplo 44
154	Figura 11.7	Gráfico del ejemplo 45
154	Figura 11.8	DCL del ejemplo 45
156	Figura 11.9	Gráfico del ejemplo
156	Figura 11.10	DCL del ejemplo
159	Figura 11.11	Gráfico del ejemplo
159	Figura 11.12	DCL del ejemplo para unificar masas
160	Figura 11.13	Gráfico del ejemplo
161	Figura 11.14	DCL del ejemplo en q_3
162	Figura 11.15	Triángulo obtenido del ejemplo
163	Figura 11.16	Gráfico del ejercicio
163	Figura 11.17	Gráfico del ejercicio
164	Figura 11.18	Gráfico del ejercicio
164	Figura 11.19	Gráfico del ejercicio
165	Figura 11.20	Gráfico del ejercicio
165	Figura 11.21	Gráfico del ejercicio
170	Figura 12.1	Estado de reposo con aplicación de fuerzas externas
171	Figura 12.2	Ejemplo para análisis de equilibrio
171	Figura 12.3	Determinación de fuerzas en equilibrio (ejemplo)
174	Figura 12.4	Gráfico del ejemplo
175	Figura 12.5	Gráfico del ejemplo
176	Figura 12.6	Gráfico del ejemplo
176	Figura 12.7	Gráfico del ejemplo
180	Figura 13.1	Posición y orientación de un sólido en el espacio
181	Figura 13.2	Coordenadas absolutas y relativas
182	Figura 13.3	Sistema de coordenadas cartesianas
182	Figura 13.4	Sistema de coordenadas espaciales
183	Figura 13.5	Sistema de coordenadas polares



184	Figura 13.6	Sistema de coordenadas cilíndrico
184	Figura 13.7	Sistema de coordenadas esférico
185	Figura 13.8	Rotaciones de un objeto en el espacio
186	Figura 13.9	Rotaciones de un objeto en el espacio
186	Figura 13.10	Sistema de rotación - Ángulos ZYX
187	Figura 13.11	Sistema de rotación - Ángulos ZYX
188	Figura 13.12	Sistema de rotación - Ángulos de Euler
189	Figura 13.13	Traslación de un sistema B respecto de uno A
190	Figura 13.14	Traslación y rotación de un sistema B respecto de uno A
191	Figura 13.15	Ejemplo de posición y rotación en el plano
192	Figura 13.16	Posiciones y orientaciones (ejemplo)
193	Figura 13.17	Matrices de rotación en el plano
195	Figura 13.18	Ejemplo de matrices de rotación en el plano
199	Figura 13.19	Gráfico del ejercicio
201	Figura 14.1	Diferentes fuerzas aplicadas en un objeto
202	Figura 14.2	Clasificación de las fuerzas
203	Figura 14.3	Ejemplo de principio de transmisibilidad
203	Figura 14.4	Ejemplo de transmisibilidad de una fuerza
204	Figura 14.5	Momento de una fuerza respecto a un punto
205	Figura 14.6	Proyección del momento en los ejes cartesianos
206	Figura 14.7	Base para truco del "levitador"
207	Figura 14.8	Fuerzas en base de truco del "levitador"
208	Figura 14.9	Momento de una fuerza respecto de un eje
209	Figura 14.10	Proyección de un momento en un sentido especificado
210	Figura 14.11	Teorema de Varignon (ejemplo)
210	Figura 14.12	Fuerzas para teorema de Varignon (ejemplo)
212	Figura 14.13	Gráfico del ejercicio
213	Figura 14.14	Gráfico del ejercicio
216	Figura 15.1	Carga uniforme en viga
217	Figura 15.2	Carga uniforme en viga inclinada
217	Figura 15.3	Carga en función de L_h o L_i
218	Figura 15.4	Componentes de una carga uniforme en viga inclinada <i>i</i>
220	Figura 15.5	Ejemplo para análisis estático <i>o</i> i
221	Figura 15.6	Fuerzas para análisis estático (ejemplo) <i>i</i>



221	Figura 15.7	Esquema del ejercicioi
221	Figura 15.8	Esquema del ejercicio 2
225	Figura 16.1	Centroide y centro de gravedad de figuras geométricas
226	Figura 16.2	Peso de un cuerpo bidimensional
227	Figura 16.3	Determinación del centro de gravedad
228	Figura 16.4	Centro de gravedad en un elemento lineal
230	Figura 16.5	Área de sección compuesta
231	Figura 16.6	Determinación del centro de gravedad en sección compuesta
234	Figura 16.7	Ejemplo para determinar el centro de gravedad
235	Figura 16.8	Áreas especificadas (ejemplo)
235	Figura 16.9	Centro de gravedad de una sección compuesta (ejemplo)
236	Figura 16.10	Esquema del ejercicio
236	Figura 16.11	Esquema del ejercicio
240	Figura 17.1	Estructura básica
242	Figura 17.2	Ejercicio sobre armaduras
243	Figura 17.3	Fuerzas sobre armadura (ejemplo)
244	Figura 17.4	Determinación de fuerzas de tracción y compresión
244	Figura 17.5	Nodo A - Ejemplo analítico
245	Figura 17.6	Nodo B - Ejemplo analítico
245	Figura 17.7	Nodo C - Ejemplo analítico
246	Figura 17.8	Nodo D - Ejemplo analítico
246	Figura 17.9	Fuerzas internas determinadas (ejemplo)
248	Figura 17.10	Aplicación de fuerzas en armadura
249	Figura 17.11	Aplicación del método de Cremona-Maxwell
250	Figura 17.12	Construcción del diagrama de Cremona-Maxwell (ejemplo)
251	Figura 17.13	Diagrama de Cremona-Maxwell (ejemplo)
251	Figura 17.14	Soluciones por el método de Cremona-Maxwell
252	Figura 17.15	Esquema del ejercicio
253	Figura 17.16	Esquema del ejercicio
256	Figura 18.1	Cargas concentradas y distribuidas sobre vigas
256	Figura 18.2	Vigas continuas conectadas por articulaciones
257	Figura 18.3	Cargas puntuales en viga
258	Figura 18.4	Determinación de fuerzas cortantes en vigas (ejemplo)
258	Figura 18.5	Análisis de la sección AC



259	Figura 18.6	Análisis de la sección AD
260	Figura 18.7	Análisis de la sección AE
261	Figura 18.8	Ejemplo para determinación de fuerza cortante en viga
261	Figura 18.9	Ejemplo para determinación de fuerza cortante en viga
262	Figura 18.10	Movimiento rectilíneo en sentidos contrarios
263	Figura 18.11	Esquema del ejercicio
263	Figura 18.12	Esquema del ejercicio
268	Figura 19.1	a) Diagrama representativo de una fuerza F que intenta sacar del reposo a la masa M . b) Diagrama de cuerpo libre de la masa M presentada en la condición a)
271	Figura 19.2	Masa M en un plano inclinado con un ángulo de inclinación crítico
272	Figura 19.3	Montaje para la práctica de fuerza de roce estático en un plano horizontal empleando portapesas
273	Figura 19.4	Montaje para la práctica de fuerza de fricción estática en un plano horizontal; empleando dinamómetro
273	Figura 19.5	Montaje para el estudio de la fuerza de roce estática en el plano inclinado
277	Figura 19.6	Gráfica del coeficiente de fricción
282	Figura 20.1	Representación esquemática de un péndulo simple
283	Figura 20.2	Esquema del montaje de la práctica de péndulo simple con temporizador
287	Figura 20.3	Aceleración de gravedad de forma gráfica
292	Figura 21.1	Esquema del movimiento de caída libre de un objeto
293	Figura 21.2	Esquema del montaje de la práctica de caída libre
301	Figura 22.1	Interacción de dos partículas aisladas
304	Figura 22.2	Esquema representativo de la explosión de dos móviles
305	Figura 22.3	Representación de una colisión bidimensional, con m_2 inicialmente en reposo
307	Figura 22.4	Esquema del montaje para la explosión de los carritos
307	Figura 22.5	Esquema del montaje y toma de datos para la colisión bidimensional
316	Figura 23.1	Modelaje del movimiento de rodamiento
320	Figura 23.2	Montaje para experimento de conservación de la energía mecánica, empleado una rampa semicircular





- 321 Figura 23.3** Montaje para experimento de conservación de la energía mecánica, empleado un péndulo

Índice de tablas

31	Tabla 3.1	Magnitudes y unidades físicas empleadas en el SI
32	Tabla 3.2	Magnitudes y unidades derivadas del SI
36	Tabla 4.1	Unidades fundamentales
37	Tabla 4.2	Unidades derivadas
38	Tabla 4.3	Unidades derivadas frecuentes
38	Tabla 4.4	Unidades suplementarias
41	Tabla 4.5	Múltiplos y submúltiplos del SI
47	Tabla 4.6	Funciones trigonométricas del triángulo rectángulo
62	Tabla 5.1	Notación científica
79	Tabla 6.1	Datos de valores para cálculo de error
81	Tabla 6.2	Datos del ejercicio de cálculo de errores
85	Tabla 7.1	Valores velocidad-tiempo para el ejemplo
88	Tabla 7.2	Datos del ejemplo de proporcionalidad
89	Tabla 7.3	Proporcionalidad cuadrática
96	Tabla 7.4	Relación de nombres y estaturas
104	Tabla 8.1	Propiedades de los vectores
110	Tabla 8.2	Propiedades del producto punto de dos vectores
112	Tabla 8.3	Propiedades del producto cruz de dos vectores
136	Tabla 10.1	Tipos de fuerza en función de su interacción
138	Tabla 10.2	Tipos de apoyos y sus reacciones
219	Tabla 15.1	Vigas estáticamente determinadas e indeterminadas
229	Tabla 16.1	Área en secciones planas
230	Tabla 16.2	Momentos de inercia en secciones planas
233	Tabla 16.3	Solución del ejemplo
241	Tabla 17.1	Tipos de armaduras
270	Tabla 19.1	Coeficientes de rozamiento o fricción para diversos tipos de materiales
274	Tabla 19.2	Modelo de tabla para el registro de datos obtenidos en la parte I



275	Tabla 19.3	Modelo de tabla para el registro de datos obtenidos en la parte I
276	Tabla 19.4	Modelo de tabla para el registro de datos obtenidos en la parte II
285	Tabla 20.1	Registro de longitudes y tiempos
286	Tabla 20.2	Datos para el cálculo de la aceleración de gravedad en forma gráfica
294	Tabla 21.1	Modelo de tabla para registro de datos
295	Tabla 21.2	Registro de parámetros
296	Tabla 21.3	Aceleración de gravedad de forma gráfica
308	Tabla 22.1	Cuadro para el registro de los datos de la parte I
319	Tabla 23.1	Momento de inercia de una esfera y un cilindro sólido, alrededor de un eje que pasa por su centro de masa
322	Tabla 23.2	Modelo de tabla para el registro de los datos colectados en la parte I
323	Tabla 23.3	Tabla de recolección de datos para cada una de las esferas

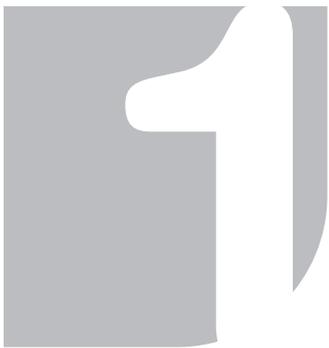






Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Aprenderemos sobre la mecánica de cuerpos rígidos y cuerpos deformables
- ▶ Estudiaremos todo sobre los fluidos
- ▶ Conoceremos la historia de la mecánica
- ▶ Sabremos sobre algunos desarrollos de la mecánica





Capítulo 1

Fundamentos de mecánica para ingenieros

El término *mecánica* se entiende como «el arte de construir una máquina». Proviene del griego μηχανική y del latín *mechanica*.

Para explicar el comportamiento de una máquina, la mecánica desarrolló criterios basados en la física newtoniana y sus respectivos desarrollos matemáticos. Este campo de estudio encajó a esta ciencia en el interés por las condiciones de reposo o movimiento de las partículas y/o cuerpos bajo la acción de fuerzas [1].

Predecir el comportamiento de los movimientos y las acciones de las fuerzas permitió plasmar las bases de la ingeniería en sus múltiples extensiones.

Imagen 1.1 Sir Isaac Newton (1643-1727)





Sir Isaac Newton (imagen 1.1) fue un notable científico, filósofo, físico y matemático de origen inglés. *Philosophiae naturalis principia mathematica* es obra maestra de su gran ingenio y producto de su insaciable curiosidad por comprender el universo.

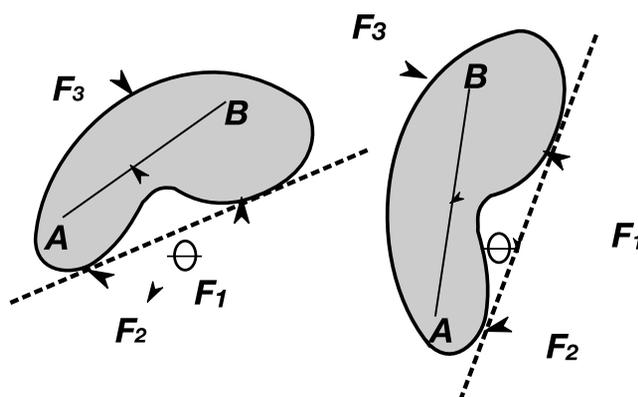
Sus amplios y extensos descubrimientos constituirían la base más sólida de la mecánica junto con otros notables científicos y descubridores de épocas anteriores.

La mecánica centra su estudio en tres aspectos fundamentales: cuerpos rígidos, cuerpos deformables y fluidos.

Mecánica de cuerpos rígidos

Su estudio aborda el comportamiento de los sólidos rígidos (figura 1.1) frente a cargas aplicadas. Sus variantes las explican dos ramas denominadas estática y dinámica.

Figura 1.1. Sólido rígido



Estática

Explica el reposo de los cuerpos analizando sus fuerzas, pares y momentos. Se fundamenta en la primera ley de Newton.

Dinámica

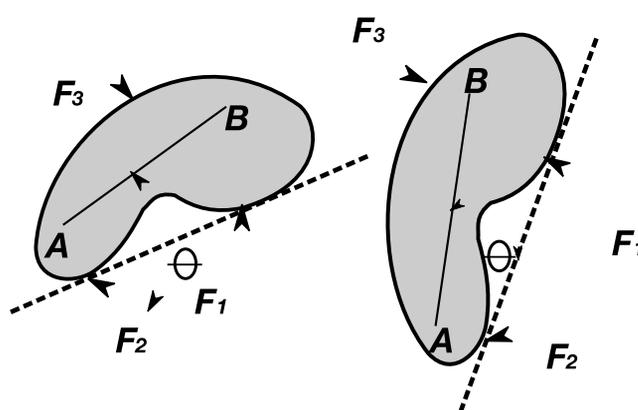
Considera, además de las fuerzas, las causas del movimiento. Añade en su estudio factores que modifican el comportamiento del sistema en su evolución con el tiempo. Evalúa efectos de aceleraciones debidas al incremento de velocidad y masas del sistema.



Mecánica de cuerpos deformables

Analiza el comportamiento de deformaciones a las que se someten los cuerpos suficientemente rígidos ante la acción de fuerzas sobre ellos. Si el estudio se realiza considerando deformaciones pequeñas, es desarrollado con criterios de resistencia de materiales (figura 1.2).

Figura 1.2. Cuerpo deformable



Mecánica de fluidos

Analiza y explica el movimiento de los fluidos (gases y líquidos) y considera las fuerzas que lo originan. Toma en cuenta, además, la interacción del fluido con el entorno limitante y sus áreas de acción corresponden a los fluidos compresibles e incompresibles [1].

Estudio de fluidos compresibles

Se encarga del comportamiento de la densidad en los fluidos, velocidades, fricciones y energías asociadas. Toma en cuenta flujos en estado estacionario.

Estudio de fluidos incompresibles

Aborda el análisis del comportamiento de fluidos como el agua, aceite entre otros que son de compresibilidad despreciable. Su estudio lo realiza la hidráulica.



Evolución e historia de la mecánica

Desde la antigüedad, el hombre primitivo requería herramientas para lograr sus actividades rutinarias. Descubrió que el sílex se distinguía de todas las demás rocas. Las hojas delgadas de este material, al ser afiladas, facilitaban la obtención de herramientas de corte. La evidencia de cuchillos, martillos, navajas muy finas propone que el hombre lo usó alrededor de algunos miles de años (imagen 1.2).

Imagen 1.2. Armas prehistóricas



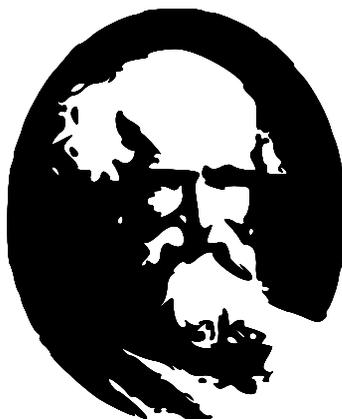
Con el desarrollo de técnicas de pulimento, el hombre logró emplear piedras volcánicas y basaltos para fabricar hachas.

En la antigüedad, se otorgaba el mérito a Tot, antiguo Dios de Egipto, quien, según la leyenda, es el inventor de las matemáticas, la astronomía y la ingeniería. También enseñó a los egipcios los principios de la geometría, la agrimensura, la medicina y la botánica.

El inventor griego Arquímedes (287-212 a. C.) (imagen 1.3) produjo obras relevantes en el ámbito de la geometría plana y del espacio, la aritmética y la mecánica. Sus aportes se anticipaban a descubrimientos relativamente modernos como el cálculo integral. Se debe a este hombre de ciencia la definición de la ley de la palanca y el invento de la polea compuesta y el tornillo sin fin, además del desarrollo de la ley de la hidrostática y su difundido principio de Arquímedes.



Imagen 1.3. Arquímedes de Siracusa



En el ámbito de la guerra, se emplearon algunos instrumentos mecánicos de Arquímedes para la defensa de Siracusa ante la invasión romana. A él se debe la invención de la catapulta y un supuesto sistema de espejos que, al enfocar los rayos del sol, lograba incendiar las embarcaciones enemigas a considerable distancia.

El matemático y científico griego Herón de Alejandría (c. 20-62) (imagen 1.4) realizó un aporte de trece obras sobre matemáticas, mecánica y física. Ideó y construyó instrumentos mecánicos de uso práctico como la eolípila, una máquina de vapor giratoria; la fuente de Herón, dispositivo que genera un chorro de agua vertical debido a la presión del aire; la dioptra, primitivo instrumento geodésico que permitía medir ángulos horizontales y verticales, es decir, fue antecesora del teodolito.

Imagen 1.4. Herón de Alejandría



El Renacimiento fue marcado por el célebre Leonardo da Vinci (imagen 1.5). Este gran exponente, nacido en 1452 en la ciudad de Vinci, Italia, realizó genialidades en la arquitectura, pintura, escultura e ingeniería, con investigaciones





y aportes de gran magnitud para su tiempo. Algunos de sus criterios aún son empleados por la ciencia.

Imagen 1.5. Leonardo Da Vinci



El aporte de Da Vinci en la mecánica se evidencia con una serie de dispositivos, máquinas y artilugios útiles en múltiples áreas. También desarrolló sistemas de canalización de agua con criterios que hasta ahora son empleados y sentó algunos principios de la aerodinámica con sus máquinas voladoras.

Por otra parte, el estudio de los movimientos planetarios dio fundamento a la mecánica. Las primeras descripciones del comportamiento de las estrellas empleadas por navegantes en sus viajes las recopiló Ptolomeo (imagen 1.6) en un primer tratado de astronomía antigua. Posteriormente, este trabajo fue complementado y aumentado por los árabes, y reeditado por Alfonso el Sabio.

Imagen 1.6. Claudio Ptolomeo





Hasta el fin de la Edad Media, el comportamiento de las estrellas no representaba gran dificultad. Sin embargo, el movimiento de los planetas representaba un reto mayor. Copérnico planteó un modelo heliocéntrico que serviría posteriormente para que Kepler (imagen 1.7) propusiera sus propias leyes:

Imagen 1.7. Johannes Kepler

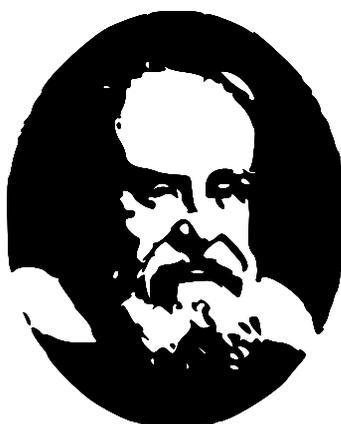


Primera ley: los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol y este se halla en un foco de las elipses.

Segunda ley: las líneas imaginarias que van del Sol a cada planeta recorren espacios iguales en el mismo tiempo.

Tercera ley: el cuadrado del tiempo que emplea un planeta en girar alrededor del Sol es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Imagen 1.8. Galileo Galilei



Galileo Galilei (imagen 1.8), originario de la ciudad de Pisa, a sus 17 años logró descubrir la ley del péndulo. Desarrolló descubrimientos sobre hidrostática.



En sus estudios sobre la caída de los objetos, descubrió que la velocidad que alcanza un cuerpo al caer depende del tiempo que se encuentre en caída [2].

Galilei contribuyó de forma importante al estudio de la dinámica, lo que sirvió de base para que posteriormente Isaac Newton formulara las leyes que fundamentan la mecánica clásica.

De sus tres leyes, la primera y la tercera se emplean en el análisis estático de cuerpos en reposo. Sin embargo, cuando el movimiento es acelerado uniformemente se hace necesario el uso de la segunda ley.

Los cambios políticos y sociales del siglo XVIII y principios del XIX exigieron una nueva modalidad de comercio, así como la creación y desarrollo de industrias que generaran productos que antes se importaban. Esta transformación en Europa del siglo XIX se dio por necesidad y gracias a la invención de la máquina de vapor.

Dennis Papin (imagen 1.9) inició el aprovechamiento de la fuerza de expansión del vapor aplicándola en su famosa marmita. Esta era capaz de producir vacío en un recipiente que inicialmente contendría vapor para enfriarlo y condensarlo. Quiso aprovechar este principio para construir una embarcación de cuatro ruedas, pero esta fue incendiada por marineros temerosos de perder sus empleos.

Imagen 1.9. Dennis Papin



Thomas Savery (imagen 1.10), basándose en los desarrollos de Papin, logró aplicar los principios para elevar agua a través del vacío para que la presión atmosférica elevara el fluido.



Imagen 1.10. Thomas Savery



En 1717, Thomas Newcomen (imagen 1.11) ideó un artefacto en el que el vapor movía un émbolo que caía nuevamente por presión atmosférica. El movimiento impulsaba un balancín que movía una palanca y a su vez el pistón de una bomba para elevar agua.

Imagen 1.11. Thomas Newcomen



James Watt (imagen 1.12), desde pequeño, en Londres, aprendió a fabricar instrumentos de física. Luego se desempeñó como reparador de aparatos de física en la universidad, donde inventó la máquina de vapor. Sus máquinas eran la mejora de los desarrollos de Newcomen.



Imagen 1.12. James Watt



Watt se hizo socio de Mathew Boulton en Boulton and Watt, en Birmingham, empresa que lideraría la producción y venta de máquinas de vapor durante medio siglo. Las industrias de hilados y tejidos fueron las primeras en utilizar estas máquinas.

En Inglaterra, por el año 1783, se desarrollaron nuevas técnicas de trabajo para la producción y comercialización de hierro maleable. Así, este país les quitó el liderazgo en esta área a Francia y Suecia.

Francia, a fin de no quedarse atrás, logró el martillo de vapor de mano de los hermanos Schneider en Le Creusot. Y posteriormente crearon los hornos Siemens.

Desarrollos en automoción

Desarrollos posteriores en el empleo del vapor pretendieron impulsar vehículos de forma automática. Sin embargo, muchos fueron los inventores y los años consumidos en estos intentos. En 1789, Oliver Evans logró su patente al elaborar un vehículo propulsado por vapor que transitó por las carreteras estadounidenses.

En Gran Bretaña, en el año de 1801, Richard Trevithick construyó un carruaje a vapor y posteriormente, en 1803, obtendría el denominado London Carriage. Al principio, estas máquinas, debido a su gran peso y complejo diseño, dañaban mucho los caminos por los que los caballos transitaban. Por eso se impusieron impuestos para su uso. Posteriormente aparecería el tren, lo que disminuyó el éxito y producción de los vehículos a vapor. Su desarrollo se frenó por treinta años en Gran Bretaña [2].

Se realizaron intentos para desarrollar el motor de combustión interna en países como Francia, Alemania y Estados Unidos.



En Alemania, en 1866, Eugen Langen y August Otto, desarrollaron un motor a gas y, en 1876, uno de combustión interna de cuatro cilindros.

En 1885 y 1887, Karl Benz y Gottlieb Daimler lograron adecuar el motor a un vehículo de forma efectiva. De estos dos intentos, el de Benz sería más tecnológico, ya que empleaba componentes de la industria de la bicicleta, con lo cual comenzaría la fabricación de vehículos de tres ruedas. Daimler se interesó en vender motores para múltiples aplicaciones.

Los ingenieros franceses René Panhard y Émile Levassor vieron futuro en el motor de Daimler. Por ello, en 1890, adquirieron derechos para fabricarlo potenciando la empresa Peugeot y transformándolo posiblemente en el primer fabricante de automóviles en serie de todo el mundo.

Mientras tanto, en Estados Unidos, John W. Lambert (1891) construyó su primera versión de un vehículo a gasolina. En 1895, Charles y Frank Duryea crearon la primera empresa automovilística estadounidense.

La demanda de vehículos se incrementó notablemente a finales del siglo XIX. Luego, con la introducción del modelo y mejoras en el proceso productivo impulsadas por Henry Ford (imagen 1.13), Estados Unidos aumentó el uso del automotor de forma masiva en la década de 1920.

Imagen 1.13. Henry Ford



Se crearon posteriormente empresas europeas inspiradas por las enseñanzas de Ford, así como las creadas por el británico Morris, el francés Citroën, el alemán Opel y el italiano Fiat.

En la década de 1930, la General Motors superó a Ford debido a su plan de comercialización y pasó a liderar el mercado junto con la marca Chrysler.



En Alemania, lideraba Opel, que era parte de General Motors desde 1928, junto con Mercedes Benz y Auto Union. Mientras que en Francia se encontraban a la cabeza Renault, Peugeot y Citroën. En Gran Bretaña, en cambio, el mercado estaría provisto por Morris y Austin, seguidos por Ford, Vauxhall, Standard y Rootes. Destacaban además Jaguar, Rover y Rolls-Royce.

En la actualidad, el mercado automotor lo lideran grandes multinacionales que conservan los esquemas de motor de combustión hechos muchos años atrás por Daimler. Se han realizado adecuaciones en lo que respecta a sistemas de control, mejoramiento del consumo y mejora de eficiencia de los motores en algunas variantes que aún conservan el principio inicial.

Se están incorporando en el mercado mundial los vehículos que emplean motores eléctricos, cuya difusión y prototipos aún se encuentran en evaluación y desarrollo.

Desarrollos en aviación

Las posibilidades de alzar el vuelo en siglos pasados contemplaban formas similares a las alas de aves y trataban de lograr objetos más ligeros que el aire.

El primer objeto volador creado en el siglo V fue una cometa o papalote. Pasados algunos siglos, el monje inglés Roger Bacon, en el siglo XIII, ya consideraba que el aire podía mantener sobre sí a un ingenio de la misma manera que el agua soporta a un barco.

Fue el gran genio Leonardo da Vinci quien centró su estudio en el vuelo de las aves proponiendo diseños que posteriormente construiría. Ideó el tornillo aéreo y el paracaídas. Propuso máquinas como el ornitóptero y el helicóptero.

En el siglo XIX, George Cayley, ingeniero e inventor británico, ya elaboraba prototipos capaces de elevar personas empleando el mismo principio de cometas o planeadores. Denominado el padre de la aviación por sus compatriotas, Cayley diseñó una especie de helicóptero impulsado por una hélice vertical.

Francis Herbert Wenham empleó un túnel aerodinámico forzando viento a fin de estudiar el comportamiento de un arreglo de alas una sobre otra.

Se obtuvieron diseños que lograban vuelos cortos y de baja altura de la mano e ingenio de los británicos John Stringfellow, William Samuel Henson, y los franceses Alphonse Penaud y Victor Tatín.

El estadounidense Samuel Pierpont Langley fabricó, en 1896, un aeroplano a vapor cuyas alas medían 4,6 m. Logró vuelos entre los 900 y 1200 m.

Vale reconocer que los mencionados desarrollos cobraron vidas de inventores, como es el caso del belga Vincent DeGroof, que se estrelló y falleció en 1874.



Los mejores y más notorios desarrollos correspondían al mejoramiento de planeadores, como los intentos del francés Jean-Marie Le Bris, quien desarrolló un prototipo de alas batientes y algunos intentos por parte de John Joseph Montgomery y el alemán Otto Lilienthal. El planeador de Lilienthal le costó la vida en 1896 al impactar desde una altura de 20 m. Similar historia es la del escocés Percy S. Pilcher, quien, tras varios exitosos intentos, falleció en 1899 al estrellarse [3].

Fue un gran aporte en 1896 el libro escrito por el ingeniero estadounidense Octave Chanute, quien previamente experimentó con planeadores de alas múltiples.

Ya por estas épocas se trataban fundamentos de aerodinámica y estabilidad del vuelo. Se habían publicado estos conocimientos en los *Aeronautical Annuals* (*Anuarios aeronáuticos*) en los años de 1895, 1896 y 1897.

En 1893, Lawrence Hargrave creó una cometa en forma de caja y Alexander Graham Bell podía elevar personas en estructuras similares a tetraedros.

A partir de 1890, proliferaron los intentos de emplear motores para elevar el vuelo. El aeroplano de Langley fue uno de ellos. Voló sin piloto por primera vez y fue bautizado como aeródromo. Un prototipo se construyó a un cuarto de la escala real y se probó con éxito. El modelo en escala real terminó lamentablemente accidentado.

Imagen 1.14. Hermanos Wright



Los hermanos Wright (imagen 1.14), sobre las experiencias del siglo XIX y con la base y aporte de Chanute, Lilienthal y Langley, lograron un primer vuelo pilotado propulsado por un motor con un diseño propio. El vuelo más largo logrado en un principio fue de 260 m en un tiempo de 59 segundos. Ya en 1905



lograrían elevarse por 38,9 km en un tiempo de 38 minutos y 3 segundos. Con el tiempo, el diseño se fue perfeccionando hasta producir el primer avión militar operativo de Estados Unidos. En tanto que, en Europa, en el año 1910, un ingenio de la misma talla se realizó gracias a Henri Fabre.

La era espacial

A inicios del siglo XX, Konstantín Eduárdovich Tsiolkovski (1857-1935), de nacionalidad rusa, era conocido por ser excéntrico. Sus teorías poseían poca relación con la realidad. Sin embargo, llegó a ser conocido como el «padre de la astronáutica».

Las contribuciones de Tsiolkovsky a la ciencia de la navegación fueron incontables. En 1883, expuso los principios que permiten el desplazamiento de un cohete en el vacío, y enunció las posibilidades de un satélite espacial en la novela *Sueños de la Tierra y el Cielo*.

En 1903, empezó a publicar su libro *Exploración del espacio interplanetario mediante aparatos a reacción*, lo que creó las bases de la teoría del vuelo de los cohetes y las perspectivas de la navegación espacial.

Una de las principales recomendaciones de Tsiolkovski consistió en utilizar propulsores líquidos, porque ofrecen mejores prestaciones que los sólidos y se pueden controlar mejor tras la ignición. También consideró que se podría controlar a los cohetes en el exterior mediante la utilización de aletas situadas en las toberas o mediante la inclinación de la propia tobera. Mencionó que era posible el uso de diversos combustibles como alcohol, gasolina o metano mediante válvulas mezcladoras que regularan el flujo de los propulsores de la cámara de combustión. Se podría refrigerar la cámara de combustión y la tobera mediante un sistema de paso de uno de los líquidos a través de una camisa de doble pared. Su preocupación por la aceleración a la cual están sometidos los cohetes fue tanta que, en sus primeros diseños de cabinas para naves espaciales, consideró que la tripulación debería permanecer tendida con la espalda apoyada sobre los motores y su inmersión en un líquido de igual densidad a la del cuerpo humano con dispositivos que absorbieran dióxido de carbono y olores. Mencionó también que los cohetes debían ser construidos con una doble pared para soportar adecuadamente el calentamiento y enfriamiento excesivos y como medida de precaución ante el posible impacto de un meteorito.

Tsiolkovski consideró que los cohetes debían poseer un giroscopio, así como la utilización de un sistema de varias etapas, «trenes de cohetes», de modo que cada una usara cierta porción de combustible hasta alcanzar la velocidad necesaria para el vuelo espacial. También se anticipó a la posibilidad de construir estaciones



espaciales, describiendo el traslado y plegado de sus componentes para su posterior despliegue y montaje. En su escrito *El avión cohete* (1930), Tsiolkovski analizaba las ventajas e inconvenientes de los aviones cohete en relación con los propulsados a hélice [3].

En 1909, el doctor norteamericano Robert H. Goddard acometió una gran investigación teórica sobre la dinámica de cohetes, midiendo el empuje de uno de combustible sólido encendido en una cámara de vacío, y desmintiendo así la creencia de que los cohetes solo funcionaban en la atmósfera. Posteriormente, los trabajos del doctor Goddard se orientaron al diseño de un cohete sonda práctico que permitiera la obtención de datos de las capas superiores de la atmósfera. Su constancia lo llevó a lanzar su primer cohete de combustible líquido el 16 de marzo de 1926 en Auburn (Massachusetts). Su proeza tan solo fue superada por un margen minúsculo por el alemán Johannes Winkler, cerca de Dessau, el 21 de febrero de 1931, cuando lanzó un cohete propulsado por metano y oxígeno líquido y alcanzó una altura de 90 m gracias a los estabilizadores que lo que se equipó.

El doctor Paul Heylandt, dueño de una fábrica de automóviles, se interesó en la experimentación de cohetes de combustible sólido en automóviles, trineos y vehículos en carriles del inventor Max Valier, por lo que le autorizó la construcción y experimentación de cohetes en dicha fábrica.

Valier pensaba que el desarrollo de los viajes espaciales pasaría por una evolución gradual del automóvil cohete al avión cohete y luego a la nave espacial.

El profesor de física y matemáticas Hermann Oberth publicó, en 1923, un reducido volumen titulado *El cohete en el espacio interplanetario*, en el que se asentaron las bases del funcionamiento de los cohetes en el vacío. Allí se afirma que, si se dispone del empuje suficiente, se podría dar una vuelta completa a la Tierra. Estos estudios excitaron la imaginación de otros adelantos.

En 1927, se constituyó un grupo conocido como Sociedad para la Navegación Espacial, el cual conduciría al desarrollo de técnicas innovadoras. Fue la cuna de científicos en ciencia de cohetes (atravesando las fronteras del espacio). Entre los principales miembros de este grupo se encontraban Johannes Winkler, Max Valier, Willy Ley, Hermann Oberth, Rudolf Nebel, Walter Hohmann, Guido von Pirquet, Eugen Sanger, Franz von Hoeffft, Kurt Hainish, Klaus Riedel, Rolf Engel y Wernher von Braun, quien ingresó al grupo a la edad de 18 años.

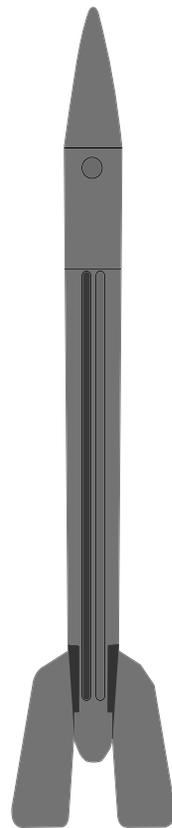
Con la llegada de Hitler al poder en 1933, las fuerzas armadas vieron sus presupuestos engrosados. La Luftwaffe estaba interesada en instalar motores cohete en sus aviones, y el ejército, en sus misiles balísticos. Así se decidió establecer un centro de investigaciones de cohetes en Peenemünde, costa alemana del Báltico.



Von Braun reclutó a parte de los colaboradores que trabajaron en el diseño de los cohetes Mirak y Repulsor en el Rakettenflugplatz, y completaron el diseño del cohete A-5 en Peenemünde. Sus lanzamientos no poseían sistemas de guiado en 1938. El primer vuelo con un sistema de control giroscópico tuvo lugar en el otoño de 1939 (a comienzos de la Segunda Guerra Mundial). Allí se probarían también los cohetes A-4, los mismos que evolucionaron a los cohetes V-1 y V-2, con los cuales se bombardeó Londres durante el conflicto bélico mundial.

El 17 de agosto, en Moscú, el GIRD 09 (imagen 1.15) alcanzó una altura de 400 m. Empleaba como propulsores oxígeno líquido y gasolina gelatinizada. El GIRD fue el primer cohete soviético de combustible enteramente líquido y alcanzó casi 80 m el 25 de noviembre de 1933.

Imagen 1.15. GIRD 09



En 1932, en Estados Unidos, Goddard instaló un giroscopio de 10,2 cm en un cohete, con un eje de giro en el eje longitudinal. El eje de giro del giroscopio permanecía vertical y, cuando el ingenio se desviaba 13 grados, se cerraban contactos eléctricos que desencadenaban una acción rectificadora; una de las cuatro aletas



aerodinámicas se abría, y simultáneamente se interponía en el chorro de gases una de las cuatro aletas deflectoras.

El 19 de abril de 1932, fue el primer lanzamiento. Este fracasó por pérdida de empuje del motor. Se lanzó a 40 metros de altura aproximadamente y bastó para observar el efecto estabilizador del giroscopio. Los deflectores estaban intactos a pesar de la caída. Eso demostraba que habían funcionado.

En los años siguientes, Goddard realizó nuevos progresos con los estabilizadores automáticos. El 8 de marzo de 1935, lanzó uno de sus cohetes, contaba con un sencillo péndulo en lugar del giroscopio, que emitía señales concretas cuando el cohete se desviaba más de 10 grados de la vertical. Alcanzó una velocidad de 700 millas por hora, y cayó a 9000 pies de la torre de lanzamiento.

En el año de 1937, lanzó con éxito otro cohete que se controlaba con una junta universal. Se alzó a una altitud de 626 m; su longitud era de 5,6 m y contaba con una pieza de cola móvil, depósito de combustible y un barógrafo a bordo.

A finales de la Segunda Guerra Mundial, los aviones polimotores alcanzaban solo 10 km; los globos sonda científicos (imagen 1.16) científicos se elevaban hasta 32 km. En 1952, en Estados Unidos se lanzaron cohetes sonda desde una altitud de 30 km, a la que fueron elevados con globos. Estos ingenios, conocidos como *rockoons*, trasladaron cargas de 9 kg a altitudes del orden de 100 km.

Imagen 1.16. Globos sonda



Al finalizar la guerra, los Estados Unidos y la Unión Soviética tenían cohetes V-2, que penetraban las capas superiores de la atmósfera y cargaban equipos científicos considerables.



El Instituto de Investigación Física Estratosférica había desarrollado y ensayado instrumentos de medidas especiales para registrar el espectro ultravioleta del Sol, las presiones atmosféricas y las temperaturas de diversas altitudes, el flujo de radiación cósmica y de otros tipos, y también un dispositivo para recoger muestras en el aire.

Con el fin de la guerra, los cohetes V-2 existentes cayeron en manos de norteamericanos, soviéticos, franceses y británicos.

En otoño de 1945, se habían embarcado en Alemania, con destino a Estados Unidos, componentes para la fabricación de más de 100 V-2, que debían montarse y lanzarse en el nuevo campo de pruebas de White Sands, en Nuevo México. El objetivo de los misiles era recoger datos sobre el entorno físico y las radiaciones de la alta atmósfera, y adiestrar en el montaje, comprobaciones y lanzamiento de cohetes de grandes proporciones.

Los cohetes V-2 de la Segunda Guerra Mundial fueron antecesores de proyectiles mucho más potentes, capaces de atravesar las fronteras del espacio y enviar robots de exploración. El año Geofísico Internacional ve nacer un satélite científico capaz de orbitar a altitudes en las cuales la colisión con las escasísimas moléculas de aire produce una resistencia despreciable.

El concepto de satélite artificial se había considerado años atrás en Estados Unidos. En 1945, el Bureau of Aeronautics (Administración de la Aviación Naval Norteamericana) realizó un estudio con la finalidad de situar instrumentos científicos en el espacio. Un año más tarde, la Fuerza Aérea de Estados Unidos estudió un informe análogo elaborado por la Douglas Aircraft Company. Este tenía el diseño preliminar de una nave espacial circundante experimental.

En Viena, el 27 de noviembre de 1953, Aleksandr Nesmeyánov, de la Academia de las Ciencias de la URSS, declaró: «La creación de un satélite artificial de la Tierra constituye una posibilidad real». Posteriormente, el 11 de septiembre de 1956, un delegado soviético declaró que su país situaría en órbita un satélite artificial ese mismo año.

El 4 de octubre de 1957, la URSS puso en órbita el Sputnik 1 (imagen 1.17), el primer satélite artificial de la tierra. Era esférico, con un diámetro de 58 cm y un peso de 83,6 kg. Contenía instrumentos para medir la densidad y la temperatura a lo largo de toda su órbita, que oscilaba entre 227 km y 941 km. También recogió datos sobre la concentración de electrones en la ionósfera. El 3 de noviembre los soviéticos lanzaron el Sputnik 2. La capacidad de carga de 508 kg comprendía a la perrita Laika e instrumentos para estudiar los efectos de la ingravidez en su cuerpo. También tenía sensores para medir el entorno de las radiaciones del espacio.



Imagen 1.17. Satélite soviético



Posteriormente, en Estados Unidos, lanzaron al espacio el Explorer 1, que era una réplica del Sputnik, más pequeño y menos pesado. Este satélite descubrió lo que se conoce como cinturones de Van Allen.

Este episodio marcó uno de los hechos más interesantes de la Guerra Fría: la carrera espacial entre Estados Unidos y la Unión Soviética. Posteriormente, con la llegada del hombre a la Luna, se dió importancia al desarrollo realizado por Estados Unidos a través de la NASA.



Lo que revisaremos en este capítulo

- ▶ Aprenderemos todo sobre los distintos tipos de la mecánica
- ▶ Conoceremos sobre la teoría cuántica



Capítulo 2

Importancia de la mecánica

La comprensión de los fenómenos naturales y el control de los mismos se ha logrado fundamentándose en los desarrollos físicos y matemáticos que se han generado y evolucionado a través del tiempo.

Dado que la mecánica estudia y describe los estados de movimiento y reposo de los cuerpos bajo la acción de fuerzas, esta ciencia se torna de infinita aplicación, así como de elevado interés para el desarrollo de las demás ciencias.

Si alzamos la vista al presente, es sencillo avizorar un futuro robótico en múltiples posibilidades, desde drones hasta humanoides, incluyendo sistemas informáticos de inteligencia independiente. Todos estos ejemplos requieren el soporte de la mecánica, ya que forman parte de sistemas en movimiento.

Bicicletas, vehículos, aeroplanos, trenes y barcos forman parte de sistemas de transporte que, para su desempeño, toman en cuenta una amplitud de criterios de mecánica.

Estructuras, edificaciones, coliseos, puentes y casas son diseños que la ingeniería y arquitectura desarrollan a diario. Estas obras no serían factibles sin análisis estáticos y dinámicos desarrollados por la mecánica.

El flujo de agua en canales, sistemas de aire comprimidos y de presión de aceite, el comportamiento aerodinámico de los sólidos, las fuerzas de sustentación en aviones e incluso las fuerzas que requiere un vehículo de Fórmula Uno para mantenerse adherido al suelo son ámbito de estudio de la mecánica.



La máquina a vapor, el motor de combustión interna, el motor eléctrico e incluso desarrollos magnéticos se emplean mediante criterios físicos que aborda la mecánica.

Las interacciones débil, fuerte, electromagnética y gravitacional emplean bases de la mecánica en su estudio.

La resistencia, las deformaciones, el pandeo y la expansión térmica que los materiales ofrecen también se analizan mediante criterios de la mecánica de materiales.

En las industrias, las máquinas, los mecanismos, los sistemas de transporte de productos y los autómatas programables también son diseñados y operados considerando los fundamentos de mecánica.

Los viajes espaciales, los cohetes, el comportamiento de los astros en el universo, los fenómenos de la luz, las fuerzas de los cuerpos y la energía oscura que abunda el universo lo explican la mecánica y sus fundamentos.

¿Es que acaso la mecánica está en todos nuestros ámbitos? Pues sí, incluso en actividades del diario vivir: en la cocina, en la ducha, en todo lo que se mueve y en lo que no.

A menudo, en cursos universitarios, se imparten fundamentos de la física como un conocimiento base para múltiples ingenierías. Estos conocimientos toman sentido al estudiar la mecánica para ingenieros en la que se aplican los criterios en el análisis estático y dinámico, principalmente.

El desarrollo de la mecánica requiere ciertos elementos de estudio como los vectores. Su empleo facilita y torna intuitivo el estudio del efecto de las fuerzas y los movimientos.

Cabe aclarar que la mecánica, en su manera general, tiene un aspecto aún más amplio que el de la mecánica clásica comúnmente impartida en los fundamentos de las carreras de ingenierías. De esta manera, aborda las siguientes variantes.

Mecánica clásica

Analiza el comportamiento de cuerpos macroscópicos, tanto en su reposo como a velocidades inferiores a la de la luz. Su estudio se aborda de dos maneras.

Mecánica vectorial

También denominada mecánica newtoniana, emplea las leyes de Newton para analizar cuerpos que se mueven a velocidades menores a la de la luz. Se considera en su análisis a la fuerza y su acción, para valorar su cantidad de movimiento (*momentum*).



Mecánica analítica

Considera la relación diferencial entre las cantidades escalares de la energía cinética y el trabajo. A partir de este análisis, se obtienen las ecuaciones de los movimientos empleando derivadas e integrales. Esta propuesta de solución la planteó Gottfried Leibniz [4].

Mecánica cuántica

Describe y estudia los fenómenos naturales en escalas espaciales pequeñas. Se centra en micropartículas, como se ha denominado a los electrones, protones, neutrones, etc. También en este estudio se considera a los átomos y moléculas, cuyos comportamientos no se ajustan a las leyes de la mecánica clásica [5].

Mecánica relativista

Emplea la teoría de la relatividad planteada por Albert Einstein para resolver la incompatibilidad entre la mecánica clásica y los fundamentos electromagnéticos. Su estudio consideró tres teorías fundamentales.

Teoría de la relatividad especial.- Plantea una física que explica el movimiento en un espacio-tiempo plano.

Teoría de la relatividad general.- Propone la deformación del espacio-tiempo debido a la influencia de materia, lo que da origen al campo gravitatorio.

Teoría cuántica de campos.- Aplica los principios de la mecánica cuántica a sistemas clásicos de campos continuos.

Mecánica de fluidos

Estudia el comportamiento de los fluidos considerando sus propiedades como presión, densidad y flujo. Esto permite seleccionar o dimensionar sistemas de tuberías y canales abiertos [6].

Mecánica de suelos

Corresponde a la aplicación de las leyes de la mecánica e hidráulica en aspectos de la ingeniería que analizan sedimentos y acumulaciones no consolidadas de partículas desintegradas de forma mecánica o como descomposición química de rocas [7].



Mecánica de la fractura

Es la parte de la mecánica que estudia el comportamiento de los materiales una vez culminado su proceso de deformación plástica, y alcanzada la separación o fragmentación de un cuerpo sólido debido a la acción de un estado de cargas.

Mecánica de materiales

Se encarga del estudio del comportamiento de cuerpos sólidos bajo la acción de múltiples tipos de cargas. Permite el análisis de la resistencia de los materiales, sean estos orgánicos o sintéticos.

El campo de estudio de la mecánica es enorme. En este documento se analizará solamente lo concerniente a la estática y dinámica, como bases fundamentales para un curso básico en ingeniería industrial.





Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Aprenderemos sobre las variables de los sistemas físicos
- ▶ Conoceremos sobre las unidades de las variables de un sistema físico





Capítulo 3

Definiciones básicas

A lo largo de la historia, los conceptos, definiciones, criterios y fundamentos también evolucionan, al igual que las especies y el pensamiento humano. La influencia de la tecnología cambia rotundamente la forma de vivir del ser humano, de sus actividades, y no por eso se detienen la ciencia y los nuevos desarrollos.

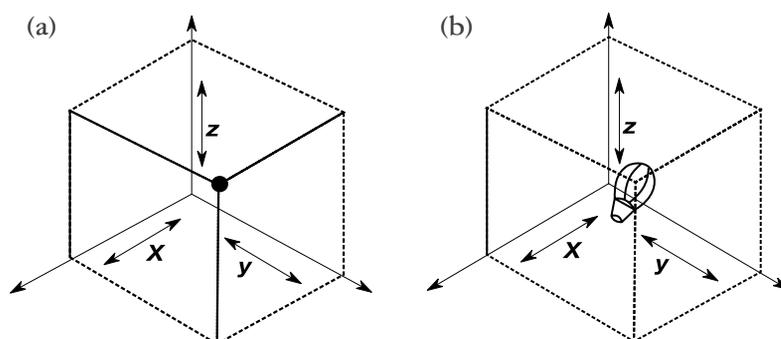
En todo texto de física o ingeniería, se abordan términos como espacio, masa, peso, tiempo, fuerza, partícula, cuerpo rígido, velocidad y aceleración. Estos términos son básicos e importantes en la fundamentación de los criterios de mecánica. Por eso es pertinente revisar estas nociones y su evolución.

Espacio

Físicamente hablando, es el lugar en donde se puede ubicar una partícula mediante tres dimensiones cuantificadas mediante tres números (coordenadas). Además, se puede definir perfectamente la ubicación y orientación de un cuerpo sólido empleando seis números que corresponden a las tres coordenadas y tres ángulos de rotación sobre cada uno de los ejes (figura 3.1).



Figura 3.1. Intuitiva de espacio (a) partícula, (b) cuerpo



La mecánica clásica considera al espacio y al tiempo como variables absolutas. En la mecánica relativista se fusionan los dos conceptos anteriores para formar el espacio-tiempo, identificado por cuatro dimensiones: tres espaciales y una temporal. Estas permiten definir sucesos.

Masa

Es un concepto físico que indica la cantidad de materia que se encuentra contenida en un cuerpo. Se cuantifica por la inercia de dicho cuerpo que establece la aceleración provocada por una fuerza que se ejerce sobre él (masa inercial) y la propiedad de todo cuerpo de atraer y ser atraído por otros cuerpos (masa gravitacional). La unidad de medida principal que se utiliza en el sistema internacional (SI) es el kilogramo (kg). Este se determinó en 1887 con un patrón de masa cilíndrico de aleación de platino-iridio almacenado en el Laboratorio Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia.

Tiempo

Se define como una magnitud física que permite medir la duración de ciertos acontecimientos y ordenarlos cronológicamente brindando noción de un pasado, presente y futuro. La unidad de medida básica en el SI es el segundo (s), determinado por 9 192 631 770 veces el período de vibración de la radiación del átomo de cesio-133 (reloj atómico). Así se obtiene una incertidumbre menor que un segundo cada 30 000 años.



Aceleración de la gravedad

Existe un efecto de atracción de alcance infinito entre los cuerpos que poseen masa. Esta rige el movimiento tanto de los objetos celestes como de los objetos más pequeños de nuestro entorno. Su comportamiento se estudia mediante la ley de atracción universal propuesta por Isaac Newton. Convencionalmente, el valor que se le asigna es de $9,81 \text{ m/s}^2$, a pesar de que su valor no es constante en la superficie terrestre. En la actualidad, existe un mapa de la variación de sus valores en el planeta.

Sistema Internacional de Unidades (SI)

El SI emplea ciertas unidades para definir las magnitudes básicas y derivadas. En este documento, se usarán estas unidades, que se resumen en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Magnitudes y unidades físicas empleadas en el SI

MAGNITUD	UNIDAD SI DE BASE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol



Tabla 3.2. Magnitudes y unidades derivadas del SI

MAGNITUD	UNIDAD SI DE BASE	SÍMBOLO	UNIDADES SI
Fuerza	newton	N	kg m/s^2
Presión	pascal	Pa	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$ o Nm^{-2}
Energía, trabajo	joule	J	$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$ o Nm
Potencia	watt	W	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}$ o Js^{-1}
Carga eléctrica	coulomb	C	A s
Diferencia de potencial eléctrico	volt	V	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$ o W A^{-1}
Actividad catalítica	katal	kat	mol s^{-1}
Volúmen	litro	L	$1\text{L} = 1\text{dm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$

Movimiento general

Un cuerpo se halla en movimiento cuando puntos integrantes de este ocupan múltiples posiciones en el espacio en distintos instantes de tiempo. Así, si conservan la misma posición, el cuerpo estará en reposo o quietud. Para tener una idea clara del movimiento en cuanto a su rapidez y comportamiento, se suele comparar con puntos y objetos inmediatos que sirven de referencia o punto de inicio.

Movimiento relativo

Si los puntos de referencia no son fijos y también se mueven, se considera un tipo de movimiento relativo respecto de estas referencias. Al considerar esto, todos los movimientos son relativos dado que la Tierra se mueve en la rotación y la traslación, entre otros.



Movimiento absoluto

Se considera respecto de una referencia en estado de absoluto reposo. En el estudio de múltiples fenómenos, se considera este tipo de referencia de manera conveniente, ya que los movimientos mecánicos se realizan en escalas muy inferiores respecto de la Tierra, incluyendo también el lanzamiento de proyectiles de mediano a corto alcance.

Trayectoria

A menudo esta definición es aplicada a sólidos cuya disposición volumétrica no es de interés. En vez de ello, su centro de gravedad se estudia en el movimiento considerándolo como una partícula. La trayectoria es entonces una línea continua que une las posiciones del punto de interés en el movimiento del cuerpo tal que si el punto se mueve a lo largo de una línea se tendrá una trayectoria rectilínea o curvilínea.



Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos los sistemas de unidades, símbolos y conversiones
- ▶ Conoceremos sobre diferentes magnitudes físicas
- ▶ Veremos la estructura y funciones de un sistema de medición
- ▶ Conoceremos los sistemas de coordenadas





Capítulo 4

Importancia de las mediciones y sus unidades

Las medidas corresponden a una necesidad esencial en la ingeniería, pero también en la vida, ya que medimos todo aquello que vemos y sentimos (tabla 4.2). Las medidas y sus unidades, su ubicación en el plano y su representación gráfica son indispensables para todo profesional exitoso. En este capítulo se encuentra todo lo referente a los sistemas de unidades, las mediciones y las unidades que debemos manejar, así como el análisis dimensional de ello. Se describen también los aspectos fundamentales de las mediciones y sus unidades.

Magnitudes físicas

Las cualidades medibles de los cuerpos se denominan magnitudes físicas.

Estas magnitudes o cantidades pueden ser: longitud, velocidad, temperatura, aceleración, fuerza, peso, presión, entre otras.

Las cantidades físicas pueden ser de varios tipos:

Fundamentales



Se expresan directamente sin necesidad de recurrir a otras. Tampoco requieren ecuaciones complementarias para definir las.

Las unidades fundamentales se encuentran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Unidades fundamentales

MAGNITUD	UNIDAD SI DE BASE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad sustancia	mol	Mol
Intensidad luminosa	candela	cd

En la Tabla 4.1 se puede ver que las unidades fundamentales no requieren tratamiento y se expresan de forma directa. Observemos ahora la Tabla 4.2, donde se pueden apreciar las unidades derivadas.

Derivadas

Las unidades derivadas son aquellas que se definen mediante la combinación de unidades fundamentales.



Tabla 4.2. Unidades derivadas

MAGNITUD	UNIDAD		EXPRESIÓN
	Nombre	Símbolo	
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m ³	m ⁻³ · kg
Caudal másico	Kilogramo por segundo	kg/s	kg · s ⁻¹
Caudal volumétrico	Metro cúbico por segundo	m ³ /s	m ³ · s ⁻¹
Cantidad de movimiento	Kilogramo-metro por segundo	kg · m/s	m · kg · s ⁻¹
Momento cinético	Kilogramo-metro cuadrado por segundo	kg · m ² /s	m ² · kg · s ⁻¹
Momento de inercia	Kilogramo-metro cuadrado	kg · m ²	m ² · kg
Fuerza	Newton	n	m · kg · s ⁻²
Momento de una fuerza	Newton-metro	n · m	m ² · kg · s ⁻²
Presión, tensión	Pascal	Pa	N/m ²
Viscosidad dinámica	Pascal-segundo	Pa · s	m ⁻¹ · kg · s ⁻¹
Viscosidad cinemática	Metro cuadrado por segundo	m ² /s	m ² · s ⁻¹
Tensión superficial	Newton por metro	N/m	kg · s ⁻²

Existen también unidades derivadas de uso frecuente (tabla 4.3), que son aquellas que usan en actividades diarias.



Tabla 4.3. Unidades derivadas frecuentes

MAGNITUD	UNIDAD		EXPRESIÓN
	Nombre	Símbolo	
Superficie, área	metro cuadrado	m ²	m ²
Volumen	metro cúbico	m ³	m ³
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	s ⁻¹ · rad
Velocidad	metro por segundo	m/s	m · s ⁻¹
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s ²	m · s ⁻²
Frecuencia	hercio	Hz	s ⁻¹
Frecuencia de rotación	por segundo	s ⁻¹	s ⁻¹

Suplementarias

Son aquellas que no se definen como fundamentales o derivadas (tabla 4.4).

Tabla 4.4. Unidades suplementarias

MAGNITUD	UNIDAD		EXPRESIÓN
	Nombre	Símbolo	
Ángulo plano	radián	rad	rad
Ángulo sólido	estereoradián	Sr	Sr



Es importante conocer las unidades que corresponden a las variables físicas que se tratarán en este libro.

Medición

Medir: comparar con un valor patrón de referencia.

Valor patrón: es aquel que está establecido de forma teórica, que se reconoce como valor verdadero de algo. Suelen ser valores reconocidos mundialmente.

Elementos del sistema de medida: todo sistema de medida tiene algunos elementos básicos (figura 4.1):

Figura 4.1. Elementos del sistema de medida



Medidas directas: son aquellas medidas que se pueden expresar directamente. Se miden con instrumento adecuado a la magnitud y se representan sin necesidad de cálculos o procedimientos de procesamiento.

Ejemplo: la distancia, el tiempo.

Medidas indirectas: son aquellas que se obtienen a través de cálculos y procedimientos adicionales. No se pueden obtener a través de un instrumento específico y requieren ecuaciones y procesamiento.

Ejemplo: la densidad, la resistividad.

Hay que recordar que, en cualquier sistema de unidades, el tiempo permanece con sus mismas unidades.



Sistema de unidades

Las cantidades físicas poseen una unidad de medida que las caracteriza. Es decir, cada vez que medimos alguna variable, lo hacemos bajo un sistema de unidades. Entonces, un sistema de unidades es un conjunto de unidades de medida a partir del cual se derivan muchas otras unidades.

Existen dos tipos de sistemas de unidades: el sistema absoluto y el sistema técnico.

El sistema absoluto: está constituido por lo siguiente:

- ▶ El sistema MKS (Sistema Internacional): metro, kilogramo, segundo
- ▶ El sistema CGS: centímetro, gramo, segundo
- ▶ El sistema FPS: pie, libra, segundo

El sistema técnico: está constituido por lo siguiente:

- ▶ El sistema MKS (europeo): metro, unidad técnica de masa, segundo
- ▶ El sistema FPS (inglés): pie, slug, segundo

Múltiplos y submúltiplos del SI

La mayoría de las veces es necesario expresar las medidas en términos muy grandes o muy pequeños, por lo que no resulta apropiado utilizar las unidades en su forma básica. De esta manera, se recurre a utilizar los múltiplos y submúltiplos de dichas unidades. Para las medidas muy grandes o muy pequeñas, se utiliza la notación científica.

No parece lógico expresar la distancia entre Venus y Saturno en metros, así como tampoco parece apropiado medir en metros el tamaño del átomo.

En la tabla 4.5, se muestran los múltiplos y submúltiplos del SI:



Tabla 4.5. Múltiplos y submúltiplos del SI

MÚLTIPLOS			SUBMÚLTIPLOS		
Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tetra	T	10^{-12}	pico	p
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d

Sistema de coordenadas en el plano

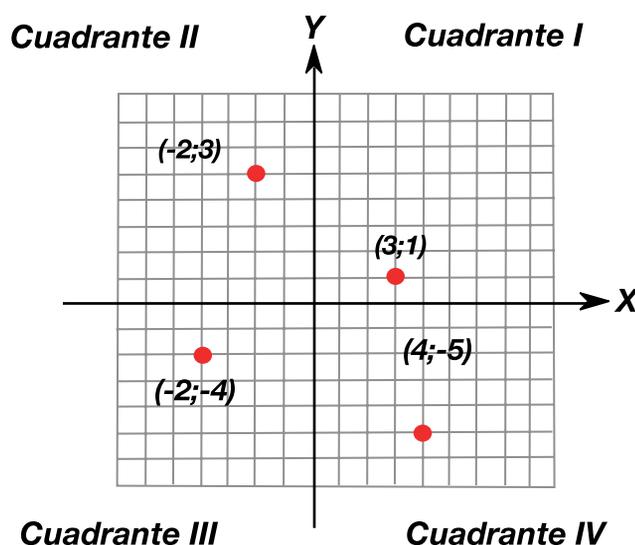
Los sistemas de coordenadas nos sirven para orientarnos en el plano y para poder establecer criterios de dimensionamiento.

Coordenadas rectangulares

Está conformado por dos ejes perpendiculares, escalados o numerados, llamados de las abscisas o eje y, y de las ordenadas o eje x. Su intersección es considerada como el origen del sistema de referencia y se denota con la letra O. Cuando se intersectan estas dos rectas perpendiculares, dividen el plano en cuatro cuadrantes.



Figura 4.2. Cuadrantes en el plano



En la figura 4.2, observamos que los cuadrantes en el plano se enumeran en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Asimismo, observamos que cada cuadrante tiene sus características propias:

Cuadrante I: se encuentra en el plano formado por las coordenadas positivas del eje x y y.

Cuadrante II: se encuentra en el plano formado por las coordenadas positivas de y y negativas de x.

Cuadrante III: se encuentra en el plano formado por las coordenadas negativas de x y y.

Cuadrante IV: se encuentra en el plano formado por las coordenadas negativas de y y las positivas de x.

Es necesario conocer las características de cada cuadrante para poder ubicar puntos en el plano.

La ubicación de puntos en el plano nos puede ayudar a una diversidad de actividades matemáticas, geográficas, artísticas, arquitectónicas, etc. Es indispensable para el desarrollo de numerosas especialidades profesionales.

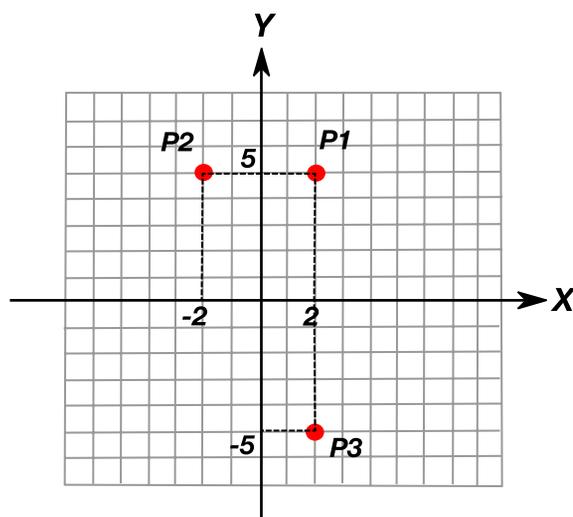
Ejemplo 1:

Ubicar los siguientes puntos en el plano (figura 4.3).

- a) $P_1 = (2,5)$ b) $P_2 = (-2,5)$ c) $P_3 = (2,-5)$



Figura 4.3. Puntos en el plano



Coordenadas polares

Las coordenadas polares consisten en un plano bidimensional en el cual cada punto es representado por una distancia y un ángulo. Este tipo de tratamiento tiene su mayor aplicación en la trigonometría.

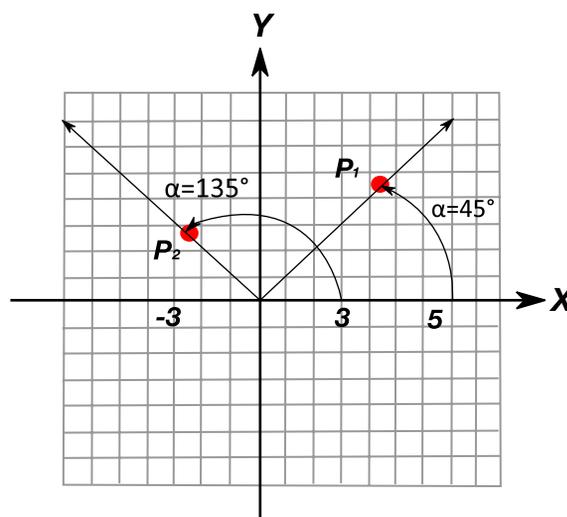
El plano polar está conformado por un eje polar de referencia x y un origen llamado polo. La distancia positiva sobre el eje polar se denota con la letra r y el ángulo se mide desde el eje polar positivo en sentido antihorario.

Ejemplo 2:

Ubicar en el plano el punto cuyas coordenadas son $r = 5$ km y $\alpha = 45^\circ$, y el punto $P_2 = (3$ km, $135^\circ)$ (figura 4.4).



Figura 4.4. Puntos en el plano polar



Coordenadas geográficas

Las coordenadas geográficas utilizan el plano geométrico caracterizado por la ubicación geográfica: latitud Norte y Sur, longitud Este y Oeste. Estas coordenadas sirven para determinar las laterales de un esferoide, por esta razón es comúnmente utilizado en las laterales de la Tierra.

El eje horizontal representa el Este a la derecha y el Oeste a la izquierda, mientras que el eje vertical que interseca con este representa el Norte hacia arriba y el Sur hacia abajo. El origen es común a cada uno de ellos.

Para representar un punto en coordenadas geográficas, primero se nombra la distancia positiva desde el origen hasta el punto, determinado por r ; luego se nombra el rumbo, que viene descrito por el Norte o el Sur, que son el punto de partida. Después se menciona el ángulo agudo que forma con el eje positivo y por último la posición Este u Oeste donde se ubicará.

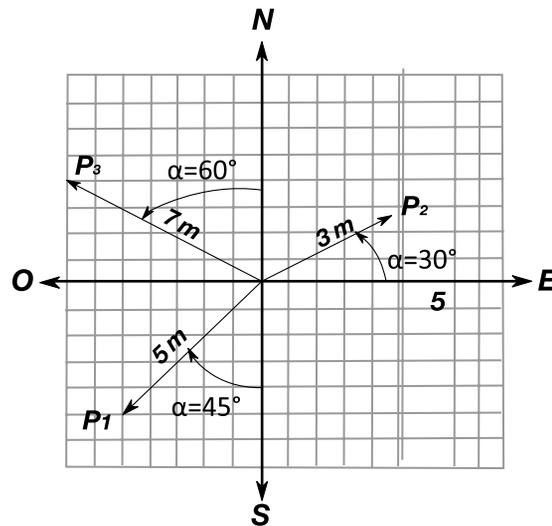
Ejemplo 3:

Ubicar en el plano geográfico los siguientes puntos (figura 4.5):

- a) $P_1 = (5 \text{ m}, S45^\circ O)$ b) $P_2 = (3 \text{ m}, N30^\circ E)$ c) $P_3 = (7 \text{ m}, N60^\circ O)$



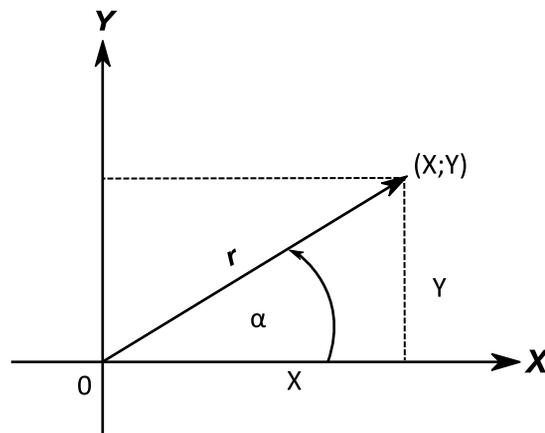
Figura 4.5. Ubicación de puntos en coordenadas geográficas



El triángulo rectángulo

El triángulo rectángulo es una figura geométrica conocida desde la antigüedad. Está conformado por un ángulo de 90° y dos ángulos agudos, que suman 90° (figura 4.6).

Figura 4.6. El triángulo rectángulo

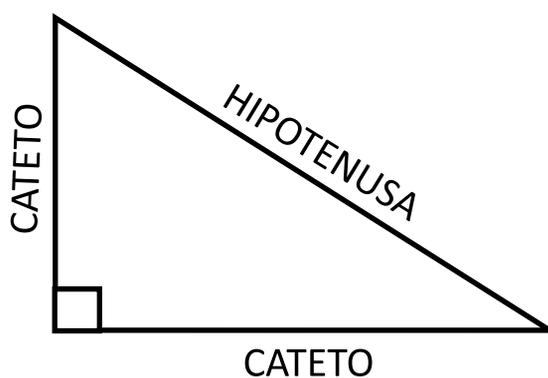




Resolución del triángulo rectángulo

Para resolver el triángulo rectángulo es necesario conocer al menos tres de sus características, entre los que indispensablemente debe estar un lado (figura 4.7).

Figura 4.7. Elementos del triángulo rectángulo



Los elementos que se utilizan en el triángulo rectángulo son:

El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras fue desarrollado en la escuela pitagórica en Mesopotamia y el Antiguo Egipto, hacia el año XXVI a. C.

El teorema de Pitágoras establece:

«La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado».

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto 1})^2 + (\text{cateto 2})^2 \quad (4.1)$$

Si utilizamos el triángulo mostrado en la figura 4.8, entonces:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (4.2)$$



Funciones trigonométricas

El triángulo rectángulo encierra varias funciones trigonométricas que relacionan sus lados y sus ángulos. Estas funciones se muestran en la tabla 4.6.

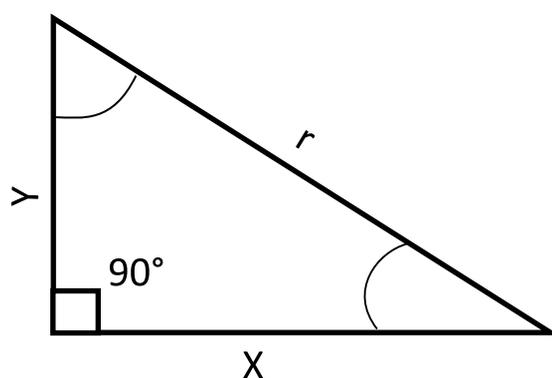
Tabla 4.6. Funciones trigonométricas del triángulo rectángulo

FUNCIÓN	SÍMBOLO	TRIÁNGULO RECTÁNGULO	ECUACIÓN
Seno	$\text{sen } \alpha$	$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$	$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}$
Coseno	$\text{cos } \alpha$	$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$	$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r}$
Tangente	$\text{tan } \alpha$	$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$	$\text{tan } \alpha = \frac{y}{x}$

El cateto opuesto es aquel que no forma parte del ángulo que se está estudiando y está en su lado enfrentado.

El cateto adyacente forma parte del ángulo de estudio. Por tanto, está conformando el ángulo (figura 4.8).

Figura 4.8. Ángulos del triángulo rectángulo



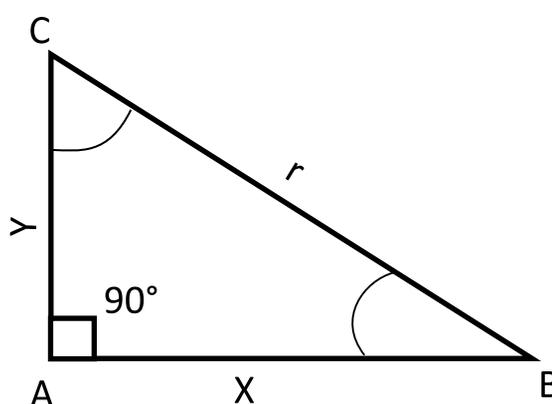


Ejemplo 4:

En el triángulo rectángulo de la figura 4.9, determinar:

- a) β en términos de r , y
- b) δ en términos de y , x
- c) β en términos de r , x
- d) r en términos de x , δ

Figura 4.9. Triángulo rectángulo, ejemplo 4



Solución:

- a. Observamos el triángulo de la figura: r es la hipotenusa, mientras que y es el cateto opuesto al ángulo β que deseamos estudiar. Por tanto, empleamos la función trigonométrica correspondiente.

$$\text{sen } \beta = \frac{y}{r} \tag{4.3}$$

- b. Observamos el triángulo de la figura anterior: y corresponde al lado adyacente a δ , mientras que x corresponde al lado opuesto. Aplicaremos la ecuación correspondiente:

$$\text{tan } \delta = \frac{x}{y} \tag{4.4}$$

- c. Si notamos, en el triángulo de la figura 4.9, la hipotenusa viene dada por la letra r , mientras que para el ángulo β el cateto adyacente es x . Por tanto, aplicando la razón trigonométrica correspondiente:

$$\text{cos } \beta = \frac{x}{r} \tag{4.5}$$

- d. Debido a que en el triángulo de la figura 4, la letra r corresponde a la hipotenusa y no tenemos ninguna razón trigonométrica que identifique la hipotenusa, entonces debemos despejar de alguna de las ecuaciones.



Observamos que x es el cateto opuesto de δ . Por tanto, buscamos una razón que nos relacione estos tres elementos.

$$\text{sen } \delta = \frac{x}{r} \rightarrow r = \frac{x}{\text{sen } \delta} \quad (4.6)$$

Conversión de coordenadas

Una vez que ya hemos estudiado el triángulo rectángulo, podemos entonces convertir las coordenadas rectangulares a polares y viceversa.

Conversión de coordenadas rectangulares a polares

Para este tipo de conversión debemos utilizar las siguientes ecuaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.7)$$

$$\theta = a \cdot \tan \frac{y}{x} \quad (4.8)$$

Ejemplo 5:

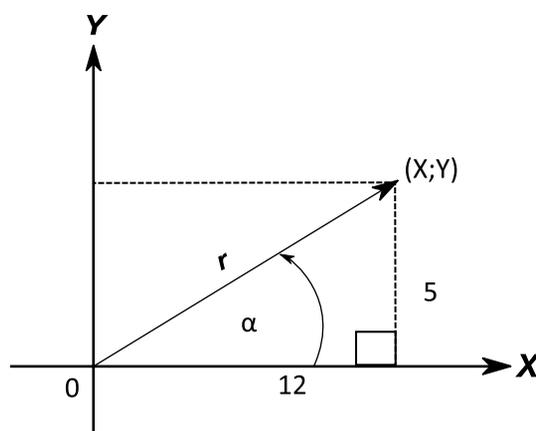
¿Qué representa el punto $P = (12,5)$ en coordenadas polares?

Solución:

Observamos que 12 y 5 son los catetos del triángulo (Figura 4.10) y que, para dar respuesta a la interrogante, necesitamos conocer el radio polar y el ángulo.

Como vimos en la resolución del triángulo rectángulo, estos dos valores podemos obtenerlos utilizando el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

Figura 4.10. Teorema de Pitágoras





Utilizando el teorema de Pitágoras.

$$r = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Utilizando la razón trigonométrica de la Ecuación 4.8:

$$\theta = a \cdot \tan \frac{5}{12} = 22,6^\circ$$

Así que el correspondiente número polar será:

$$P = (13; 22,6^\circ)$$

Conversión de coordenadas polares a rectangulares

Ejemplo 6:

¿Cuál es el equivalente rectangular del punto polar $P = (13, 23^\circ)$?

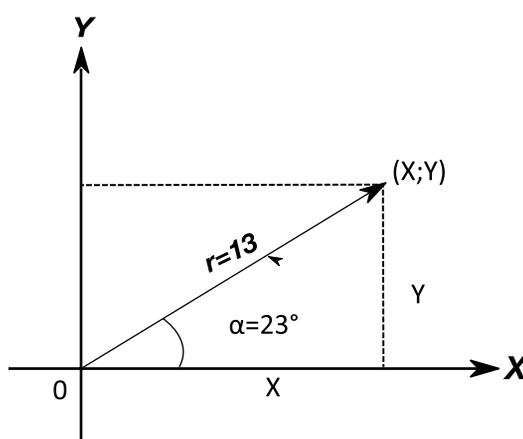
Solución:

Si ubicamos este punto en el plano, obtendremos la figura 4.11.

Observamos que r corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo. Por tanto, podemos emplear la función trigonométrica que relaciona la hipotenusa con cualquiera de los catetos.



Figura 4.11. Ubicación de un punto en el plano



$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \cdot \text{sen } \alpha$$

$$y = 13 \times \text{sen } 23^\circ = 5,08$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cdot \text{cos } \alpha$$

$$x = 13 \times \text{cos } 23^\circ = 11,98$$

De esta manera hemos calculado el punto en las coordenadas rectangulares $P = (5,08; 11,98)$ a partir de un punto en coordenadas polares.

Así que, en forma general, podemos decir que, para convertir coordenadas polares a rectangulares, basta con emplear las funciones del seno y coseno.

$$y = r \cdot \text{sen } \alpha \quad (4.9)$$

$$x = r \cdot \text{cos } \alpha \quad (4.10)$$



Análisis dimensional

Cuando hablamos de análisis dimensional, estamos estudiando si una expresión concuerda con las unidades que le correspondería tener según la expresión en la cual se encuentre.

Para saber las unidades correctas que debe tener una magnitud, es necesario que evaluemos su naturaleza y conozcamos su origen físico.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7:

Tenemos la expresión $v_f = v_0 + at$, con valores que se encuentran en unidades de aceleración, tiempo y velocidad:

$$v_f = \text{m/s}; v_0 = \text{m/s}; a = \text{m/s}^2; t = \text{s}$$

Se estima que una velocidad poseerá valores en m/s. Por tanto, se espera como resultado una igualdad en esos valores.

Entonces el análisis nos indica que sustituyendo las unidades en la ecuación tenemos:

$$\text{m/s} = \text{m/s} + (\text{m/s}^2) * \text{s}$$

$$\text{m/s} = \text{m/s} + \text{m/s}$$

$$\text{m/s} = \text{m/s}$$

Por lo que la ecuación dimensionalmente es correcta.

Ejemplo 8:

Si tenemos $y = g*(t^2/2)$:

$$g = \text{m/s}^2; y = \text{m} \text{ y } t = \text{s}$$

Hagamos el análisis dimensional

$$m = (\text{m/s}^2) * \{(s)^2/2\}$$

$$m = \text{m}/2$$

$$m = \text{m}$$

Obsérvese que, para el análisis dimensional, los valores constantes son irrelevantes. Lo que tiene mayor relevancia son las unidades que se emplean.



Si observamos los ejemplos 8 y 9, notamos que lo esencial en el análisis dimensional es conocer la naturaleza de las variables que estamos tratando. También se trata de identificar los múltiplos y submúltiplos de las unidades empleadas.

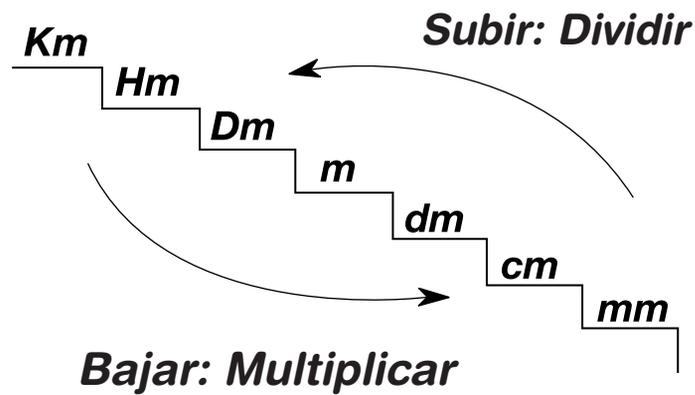
Para hacer la conversión de una unidad a otra, debemos tener en cuenta la relación entre las unidades derivadas y la unidad principal. Veamos la figura 4.12.

En una regla, los números grandes representan los centímetros, que son la centésima parte del metro. Las rayitas chiquitas representan los milímetros, que son la milésima parte del metro. ¡Entonces el metro es nuestra unidad principal!

Para convertir unidades debemos seguir esta norma:

Cuando vas de la unidad principal a una unidad mayor, debes dividir. Cuando vas de la unidad principal a una unidad menor, debes multiplicar. Siempre hay que tener en cuenta que se utilizan múltiplos de 10.

Figura 4.12. Conversión de unidades





Ejercicios propuestos de sistemas de unidades

1. Evalúa si las siguientes unidades se corresponden.

- a) $35 \text{ m} = 3500 \text{ cm}$
- b) $765 \text{ m} = 76\,500 \text{ cm}$
- c) $1458 \text{ m} = 145\,800 \text{ cm}$
- d) $6785,3 \text{ m} = 678,530 \text{ cm}$

2. Evalúa si las siguientes unidades se corresponden.

- a) $45 \text{ g} = 0,045 \text{ kg}$
- b) $78 \text{ g} = 0,078 \text{ kg}$
- c) $145,7 \text{ g} = 0,1457 \text{ kg}$
- d) $987,56 \text{ g} = 0,98756 \text{ kg}$

3. Identifica cuál de las siguientes conversiones de metro a kilómetro es correcta.

- a) $53 \text{ m} = 0,053 \text{ km}$
- b) $567 \text{ m} = 5,67 \text{ km}$
- c) $8541 \text{ m} = 8,541 \text{ km}$
- d) $567,45 \text{ m} = 5,6745 \text{ km}$

4. Verifica si las siguientes operaciones son correctas.

- a) $67 \text{ m} + 0,43 \text{ cm} = 67,43 \text{ m}$
- b) $78,3 \text{ m} + 5,98 \text{ cm} = 78,03598 \text{ m}$
- c) $95,2 \text{ cm} + 8,76 \text{ m} = 971,2 \text{ cm}$
- d) $234 \text{ cm} + 56,7 \text{ m} = 2,3456 \text{ m}$

5. Verifica si las siguientes operaciones son correctas.

- a) $56 \text{ g} - 5 \text{ kg} = 4944 \text{ g}$
- b) $7,8 \text{ kg} - 150 \text{ g} = 7650 \text{ g}$
- c) $987 \text{ kg} - 250 \text{ g} = 98,7 \text{ g}$
- d) $6,7 \text{ g} - 70 \text{ mg} = 76,7 \text{ mg}$

Nombre:

.....

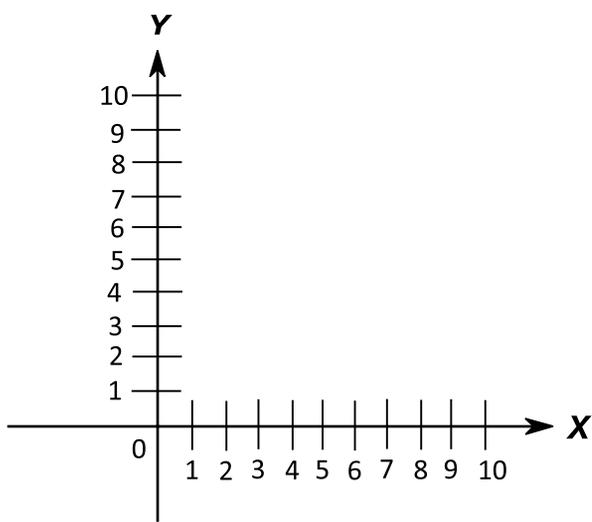
Calificación:



Ejercicios propuestos de plano geométrico

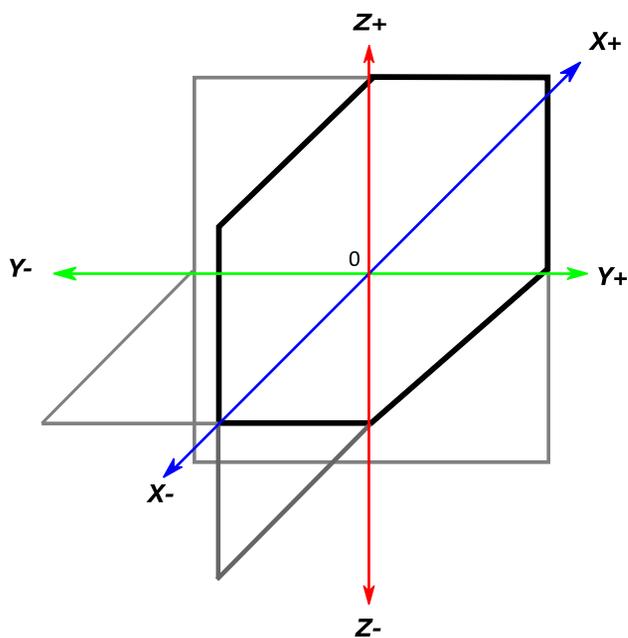
1. Ubica el punto B (3,2) en el plano siguiente (figura 4.13).

Figura 4.13. Plano cartesiano



2. Ubica en el espacio los los puntos W (-3, 2, 5) y X (4, -2, -1) (figura 4.14).

Figura 4.14. Plano tridimensional



Nombre:

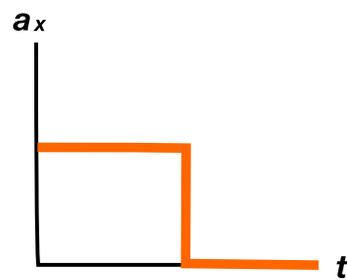
.....

Calificación:



3. Observa atentamente la Figura 4.15 e indica el enunciado correcto:

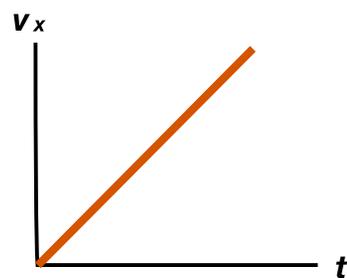
Figura 4.15. Gráfica $a_x - t$



- a) La aceleración se mantuvo constante hasta que se hizo cero.
- b) La aceleración estaba variando hasta que se hizo cero.
- c) El tiempo se hizo cero.
- d) La aceleración era variable.

4. Observa la figura 4.16 e indica a cuál conclusión se puede llegar:

Figura 4.16. Gráfica $V_x - t$



- a) La velocidad es constante.
- b) La velocidad varía de forma constante y homogénea.
- c) El tiempo es infinito y acotado.
- d) Ninguna de las anteriores.

Nombre:

.....

Calificación:



Ejercicios propuestos de sistemas de unidades

- 1) Si tenemos la expresión $v_f = v_0 + at$, donde v_0 está expresado en cm/s, a está expresado en m/s^2 y t se expresa en horas, haz el análisis dimensional correspondiente.
- 2) Teniendo en cuenta la expresión $y = g*(t^2/2)$ donde g está en m/s^2 y t está en segundos, realiza el análisis dimensional correspondiente.
- 3) Dada la expresión $A = X(H+W)$, si H está en m/s y X está en segundos, ¿qué unidades deben tener A y W ?

Nombre:

.....

Calificación:



5

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos una de las partes más importantes de la física: el tratamiento de errores
- ▶ Haremos proyectos simples para comprender las teorías físicas
- ▶ Resolveremos ejercicios



Capítulo 5

Experimentación científica y cálculo de errores

Experimentación científica

La experimentación científica es un método común en la física. Consiste en el estudio de una situación física, también llamada fenómeno, que se reproduce en un laboratorio bajo condiciones específicas para poder realizar el estudio. Para hacer esta experimentación, se debe contar con instrumentos y equipos de medición de las variables.

Una variable es un parámetro o un evento que cambia durante el experimento. Puede ser dependiente o independiente.

La primera está determinada por el tiempo u otra variable. La independiente es aquella que no depende de ninguna otra variable. Es el comportamiento de esta el que queremos evaluar.

En la física, existen muchos experimentos que se hacen para estudiar aspectos de la vida cotidiana. Los más comunes están relacionados con el movimiento de los cuerpos.

El estudio de este fenómeno se hace para evaluar el comportamiento de un cuerpo en determinadas situaciones. Por lo general, se analiza uno móvil ante una situación hipotética que se asemeje a las situaciones reales.



En la mayoría de experimentaciones físicas, se estudian los cuerpos que se deslizan linealmente. También, los cuerpos que caen libremente o aquellos que giran en torno a un eje.

En la experimentación científica, debemos tener en cuenta la medición de las variables, los instrumentos empleados y las ecuaciones que rigen cada situación.

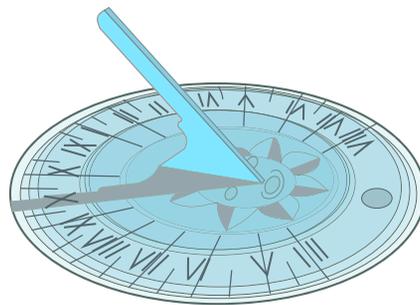
Proyecto simple: hagamos un reloj solar práctico

¿Sabías que los relojes de sol existen desde el antiguo Egipto?

En la Antigüedad, los egipcios consideraron la necesidad de conocer el tiempo. Ellos vigilaban las estrellas para poder establecer las relaciones al respecto.

El reloj solar (imagen 5.1) es un dispositivo que utiliza la luz del sol para proyectar la sombra de un elemento vertical sobre una plantilla con las horas distribuidas.

Imagen 5.1. Reloj solar analemático



Recordemos que el Ecuador está ubicado en la mitad del planeta y que la incidencia de los rayos de sol es de forma casi perpendicular. Por tanto, el reloj de sol más apropiado es conocido como analemático.

El reloj de sol analemático está conformado por una semielipse donde se proyectan las horas. No es circular, como se conoce normalmente.

El bastón vertical que proyecta la sombra se llama gnomon y debe ser lo suficientemente alto para que, en todo momento, su sombra se proyecte en la superficie plana.

En los lugares turísticos, suele usarse como gnomon la proyección de la sombra de los turistas, como atractivo de participación y entretenimiento.

¿Cómo hacer un reloj solar?

1. Ubica un cartón firme y, en él, dibuja una semielipse.
2. En esta semielipse, dibuja las horas.



3. En el centro de esta figura, coloca un gnomon que sea más alto que los lados de la elipse, de tal manera que pueda proyectar su sombra en todas las horas.
4. ¡Listo! Ya estás preparado para medir el tiempo con tu reloj solar.

Historia de los métodos experimentales

Alrededor del año 450 a. C, existió un filósofo griego llamado Empédocles. Él formuló una de las primeras ideas de la visión humana. En sus teorías establecía que la luz provenía del ojo. Este filósofo pensaba que la diosa griega Afrodita había dado virtudes al ojo humano y que la visión era el resultado del fuego que este podía emanar, iluminando así el entorno de las personas.

Las ideas de Empédocles se mantuvieron por varios años, a pesar de que se intentaron debatir sus teorías. No fue sino hasta el año 1000 de la era moderna, cuando el científico persa Abū Alī al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham, también conocido para Occidente como Alhazen, dio un nuevo enfoque de la naturaleza de la luz. Alhazen nació en el año 965 en la ciudad de Basra, en el actual Iraq.

Alhazen realizó sus experimentos sobre la luz encerrándose en una habitación oscura con solo un agujero por donde podía pasar la luz. Del lado externo de esta habitación, colocó unas lanternas ubicadas a diferentes alturas, de tal manera que la luz entraba a través del agujero con proyecciones diferentes. Él observó que la luz proyectada mantenía una línea recta desde la linterna hasta el agujero y desde el agujero hasta la proyección. También observó que, al tapar la linterna, ya no había luz y que al destaparla volvía la luz. De esta manera, Alhazen demostró que la luz no provenía del ojo humano, sino que tenía otras fuentes como la linterna. Alhazén desarrolló un método científico innovador para la época. Él planteó una hipótesis: la luz no emana del ojo humano. Luego empleó un método para demostrar la veracidad de la misma y logró un aporte significativo a la investigación científica de la actualidad.

Uno de los aportes más significativos de Alhazen es una enciclopedia de siete tomos que expone sus estudios sobre la óptica: *Opticae Thesaurus Alhazeni* que, traducido, puede leerse como *El libro de Alhazen sobre la óptica*. En este libro, además de contribuir notablemente al estudio de la óptica y la luz, también se evidencia el método científico empleado.



Notación científica

Es importante conocer la notación científica porque esto nos ayuda a manejar los datos, que, en el mundo de la física y el cálculo, pueden ser muy grandes o muy pequeños.

Cuando se trabaja con unidades de medida, comúnmente es necesario utilizar múltiplos y submúltiplos para garantizar un trabajo más cómodo con los números y un procesamiento más sencillo que puede, muchas veces, evitar errores. Sin embargo, en ocasiones no es posible encontrar el múltiplo adecuado o las transformaciones de unidades nos conducen a números erróneos. Para evitar estos procesamientos es necesario emplear la notación científica, empleando las potencias de base diez, que logran simplificar el problema.

Veamos el ejemplo 9:

Ejemplo 9:

El número 1000 es igual a $10 \times 10 \times 10$, lo que significa que es igual a 10^3 .

El número 100 000 es igual a $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$, que es igual a 10^5 .

De esta manera se puede formular la tabla 5.1:

Tabla 5.1. Notación científica

1 000 000	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^6
100 000	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^5
10 000	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^4
1000	$10 \times 10 \times 10$	10^3
100	10×10	10^2
10	10	10^1
1	1	100
0,1	1/10	10^{-1}
0,01	1/100	10^{-2}



Se observa, en la Tabla 5.1, cómo el exponente de base diez coincide con la cantidad de ceros que tenga la cifra, y que son negativos los exponentes cuyas cifras sean números muy pequeños con decimales.

Al escribir un número de esta manera, solo podremos colocar cifras con un único número delante de la coma decimal, lo que significa que este número solo podrá estar entre 1 y 9.

Ejemplo 10:

$$5,1416 \times 10^4$$

De esta manera apodemos identificar un número en notación científica.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11:

$$51,416 \times 10^3$$

$$0,51416 \times 10^{-1}$$

$$5,1416$$

Del ejemplo anterior, se observa que el primer número no es notación científica, puesto que la cifra que antecede a la coma es mayor que 9, y se sabe que la notación científica debe tener un número entre 1 y 9. Del segundo número se observa que la cifra que antecede la coma es 0 y ya sabemos que no puede ser así. Del último número podemos notar que no posee la potencia en base diez. Por tanto, ninguno de estos ejemplos está en notación científica.

¿Cómo escribir números en notación científica?

Solo tenemos que contar los ceros y tener claras las reglas necesarias para que el número esté en notación científica.



Ejemplo 12:

Escribir el número $8^{\circ}567^{\circ}000$ en notación científica.

En primer lugar, observamos que se trata de un número grande. Por tanto, ya podemos suponer que la potencia será un número positivo. Sabemos que el número delante de la coma debe estar entre 1 y 9. Por tanto, debemos colocar la coma después del 8; de esta manera cumplimos con la primera regla. Luego contamos todos los números que están después de la coma. Como observamos, son seis números, por tanto, la potencia será 6. Por último, agregamos la potencia de base diez.

Respuesta:

$$8^{\circ}567^{\circ}000 = 8,567 \times 10^6$$

Es decir, se coloca la coma tras la primera cifra y la potencia de base diez con el exponente igual al número de dígitos en el segmento decimal.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 13:

Escribir el número 4586 en notación científica.

Observamos que el número es mayor que cero, por tanto, la potencia será positiva.

Paso 1: colocamos la coma después de la primera cifra.

$$4,586$$

Paso 2: colocamos la potencia de base diez.

$$4,586 \times 10$$

Paso 3: contamos el número de dígitos después de la coma. Este será el exponente.

$$4,586: \text{hay tres números después de la coma.}$$

Finalmente tenemos la conversión:

$$4586 = 4,586 \times 10^3$$



Ahora bien, cuando los números son menores que uno, es decir, que tienen ceros delante y detrás de la coma, el procedimiento es similar pero siempre teniendo en cuenta que el exponente será negativo.

Ejemplo 14:

Escribir el número 0,00000369 en notación científica.

Paso 1: colocamos la coma detrás del primer dígito distinto de cero, en este caso, el número 3, y eliminamos todos los ceros que se encuentran delante.

3,69

Paso 2: contamos todos los números que estaban detrás de la coma original y delante de la coma nueva.

0,00000369: hay 6 números, el exponente será seis.

Paso 3: colocamos la potencia en base diez y el exponente negativo.

$3,69 \times 10^{-6}$

Es decir, para números menores que cero, corremos la coma hasta el primer dígito distinto de cero y contamos los espacios que vamos recorriendo para determinar la potencia negativa.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 15:

Escribir en notación científica el número 0,0000000000483.

Paso 1: colocamos la coma detrás del primer dígito distinto de cero, es decir, corremos la coma 11 espacios hacia la derecha.

4,83

Paso 2: contamos los espacios recorridos. Como observamos, son 11. Este será el exponente negativo.

0,0000000000483



Paso 3: colocamos la potencia en base diez con el exponente negativo.

$$4,83 \times 10^{-11}$$

Como hemos observado, al multiplicar un número por 10 se desplaza la coma un espacio hacia la derecha. Al multiplicar por 100, se desplaza la coma dos espacios a la derecha. Pero, cuando dividimos, ocurre lo contrario. Si dividimos entre 10, se desplaza la coma un espacio hacia la izquierda; si dividimos entre 100, se desplaza la coma dos espacios hacia la izquierda. Nada de esto es necesario cuando empleamos la notación científica, ya que todo el proceso se sustituye con la potencia de base diez.

Es importante tener claro que rodar la coma hacia la derecha implica que el exponente disminuye, y que rodarlo hacia la izquierda implica que el exponente aumenta. Recordemos que en los números negativos el -3 es mayor que el -4 , por tanto, el cambio debe cumplir la regla de los números negativos.

Ejemplo 16:

Rodar la coma hacia la derecha:

$$325,687 \times 10^3$$

$$3256,87 \times 10^2$$

$$32568,7 \times 10^1$$

Rodar la coma hacia la izquierda:

$$325,687 \times 10^3$$

$$32,5687 \times 10^4$$

$$3,25687 \times 10^5$$

Rodar la coma en números menores que cero:

$$0,258 \times 10^{-1}$$

$$2,589 \times 10^{-2}$$

$$25,89 \times 10^{-3}$$



Operaciones con notación científica

Los números que se encuentran en notación científica también pueden ser operados matemáticamente, con las mismas reglas que los demás. Por tanto, también cumplen las normas de adición, sustracción, multiplicación y división.

Adición y sustracción

Para poder sumar números en notación científica, es necesario que ambos números tengan la misma potencia en base diez, y se suman los números de la forma habitual.

Ejemplo 17:

Sumar los números $2,45 \times 10^7$ y $9,38 \times 10^7$.

Procedimiento:

$$2,45 \times 10^7 + 9,38 \times 10^7$$

$$(2,45 + 9,38) \times 10^7$$

Se sacar factor común

$$11,83 \times 10^7$$

Se suma normalmente

Resultado:

$$2,45 \times 10^7 + 9,38 \times 10^7 = 11,83 \times 10^7$$

Si los números que queremos sumar no tienen el mismo exponente, entonces será necesario correr la coma del número que tenga el menor exponente para que se ajuste al exponente del otro y así poder sumar.

Ejemplo 18:

Sumar los números $3,678 \times 10^5$ y $5,489 \times 10^6$.

Corremos la coma del número de menor exponente:

$$3,678 \times 10^5 = 0,3678 \times 10^6$$



Ahora podemos sumar:

$$0,3678 \times 10^6 + 5,489 \times 10^6$$

Sacamos factor común y resolvemos:

$$(0,3678 + 5,489) \times 10^6 = 5,8568 \times 10^6$$

Con la resta procedemos de la misma manera: evaluamos que los exponentes de base diez sean iguales y, si no son iguales, los ajustamos.

Ejemplo 19:

Restar los siguientes números $8,65 \times 10^4$ y $3,32 \times 10^4$.

$$8,65 \times 10^4 - 3,32 \times 10^4$$

Sacamos factor común y resolvemos:

$$(8,65 - 3,32) \times 10^4 = 5,33 \times 10^4$$

Ejemplo 20:

Restar los siguientes números $9,45 \times 10^7$ y $5,26 \times 10^5$.

Ajustamos los exponentes rodando la coma del exponente menor:

$$5,26 \times 10^5 = 0,0526 \times 10^7$$

Ahora aplicamos el procedimiento de resta normalmente:

$$9,45 \times 10^7 - 0,0526 \times 10^7$$

Sacamos factor común y resolvemos:

$$(9,45 - 0,0526) \times 10^7 = 9,3974 \times 10^7$$



Multiplicación y división

Para realizar operaciones de multiplicación y división, deben cumplirse y respetarse las reglas de las potencias. Esto significa que el exponente de base diez puede o no ser el mismo para ambos números a operar. El resultado se verá afectado por el procedimiento de cálculo que lo respalda.

Ejemplo 21:

Multiplicar los siguientes números $3,25 \times 10^6$ y $5,19 \times 10^{-4}$.

Para resolver, empleamos el procedimiento de multiplicación y de potencias.

$$(3,25 \times 10^6) \times (5,19 \times 10^{-4}) = 16,8675 \times 10^2$$

Es decir:

$$3,25 \times 5,19 = 16,8675$$

$$10^6 \times 10^{-4} = 10^{6-4} = 10^2$$

Resultado:

$$16,8675 \times 10^2$$

Recordemos que, al multiplicar potencias de igual base, se suman algebraicamente los exponentes.

De la misma manera, para realizar la división de dos números en notación científica, deben considerarse las reglas de la división y de las potencias.



Ejemplo 22:

Dividir los siguientes números: $7,22 \times 10^{-8}$ y $3,18 \times 10^{-3}$

$$\frac{7,22 \times 10^{-8}}{3,18 \times 10^{-3}} = 2,27 \times 10^{-5}$$

Es decir:

$$\frac{7,22}{3,18} = 2,27$$

$$\frac{10^{-8}}{10^{-3}} = 10^{-8-(-3)} = -5$$

Resultado:

$$2,27 \times 10^{-5}$$

Recordemos que, al dividir potencias de igual base, se restan algebraicamente los exponentes.

De la misma manera, es importante recordar que las reglas de la potenciación prevalecen en los cálculos de la notación científica.



Ejercicios propuestos

1. Escribe en notación científica los siguientes números.
 - a. 205,89
 - b. 0,000059874
 - c. 0,0000000000000022558964
 - d. 5897,4613
 - e. 8 698 523 641
 - f. 265 874 961
 - g. 0,000000000000000000000000002589746215345
 - h. 58 961 452 871 203 658

2. Realiza las siguientes operaciones en notación científica.
 - a. $(3,4567 \times 10^5) + (7,5678 \times 10^{-9})$
 - b. $(1,470 \times 10^{-8}) + (0,2346 \times 10^{-3})$
 - c. $(4,678 \times 10^{-13}) - (9,3408 \times 10^5)$
 - d. $(8,698 \times 10^{-4}) - (5,8431 \times 10^{15})$
 - e. $(3,8755 \times 10^{12}) \times (0,45987 \times 10^{-9})$
 - f. $(0,9655 \times 10^{11}) \times (0,75897 \times 10^{-4})$
 - g. $(3,4567 \times 10^5) / (7,5678 \times 10^{-9})$
 - h. $(4,678 \times 10^{-13}) / (9,3408 \times 10^5)$

3. Dados los números.
 $A = 7,025896 \times 10^{-8}$, $B = 0,548963210 \times 10^{12}$, $C = 0,57 \times 10^{-16}$
Realizar las siguientes operaciones:
 - a. $A - B$
 - b. $C - A$

Nombre:

.....

Calificación:



- c. $A + C - B$
 - d. $B - A$
 - e. $C + B - A$
 - f. $C \times (B + A)$
 - g. $A / (B + A)$
 - h. $B - A (B + C)$
-
- 4. Cuenta los segundos que han pasado desde que terminó el año y escríbelo en notación científica. Asimismo, cuenta los segundos que faltan para que termine el año.
 - 5. Escribe en notación científica los metros que habrá en un metro cúbico.
 - 6. Escribe en notación científica los litros que habrá en un centímetro cúbico.
 - 7. Escribe en notación científica la distancia de la Luna a la Tierra.
 - 8. Cuenta los segundos que hay en un día y escríbelos en notación científica.
 - 9. ¿Por qué crees que es importante la notación científica en la física?
 - 10. ¿Por qué crees que es importante la notación científica en la vida cotidiana?





6

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos los tipos de errores en las mediciones
- ▶ Realizaremos ejercicios



Capítulo 6

Errores en la medición

El proceso de medición es un procedimiento físico que está sujeto a un experimento con algunos aspectos específicos interrelacionados. Cada medición contiene una magnitud, una unidad de medida y un error. Todas las mediciones físicas deben tener estos tres elementos para garantizar una correcta medida.

Medir + Unidades \pm Error

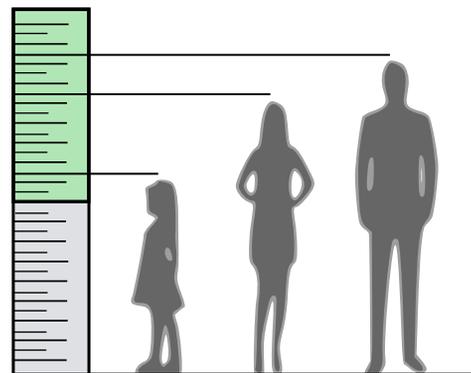
La medida es el número que resulta de una medición. Cuando la realizamos, lo que hacemos es comparar; siempre comparamos con un valor patrón (imagen 6.1).

Cuando se realiza una medición, siempre se obtendrán errores en el proceso y el procedimiento. No es posible evitarlos; sin embargo, se puede reducirlos al máximo.

Imagen 6.1. El patrón de medida

El valor patrón es aquel que se utiliza como referencia para una medición. Es un valor establecido por alguna organización científica reconocida. El valor patrón es aceptado mundialmente, es considerado como la unidad.

Ejemplos: el metro, el amperio, el segundo.





En ningún caso será posible repetir el procedimiento tal que todos los resultados de una medida sean exactamente iguales. Al medir una misma cantidad repetidas veces, se obtendrán distintos valores diferentes entre sí en pequeñas proporciones. Estas tienen la misma posibilidad de ocurrir por exceso o por defecto de la medida.

Debe tenerse en cuenta que el error no es una falla, no es algo indeseado; es más bien una incerteza o indeterminación experimental, que conduce al conocimiento del sistema de medida. De esta manera es posible mejorar las condiciones del sistema y reducir los errores lo más posible.

En un proceso de medida no se busca el valor verdadero de una magnitud. Es importante saber que este no existe y no podemos concretarlo.

Para comprender la indeterminación del valor verdadero es necesario conocer los siguientes términos:

Exactitud: es la cualidad que tiene un instrumento de acertar el valor que se quiere medir.

Precisión: es la cualidad que tiene un instrumento de acertar siempre en el mismo valor, aun cuando este no sea el valor que se quiere medir.

A continuación, una explicación gráfica acerca de estos dos términos en las imágenes 6.2 y 6.3.

Imagen 6.2. Diferencias entre exactitud y precisión

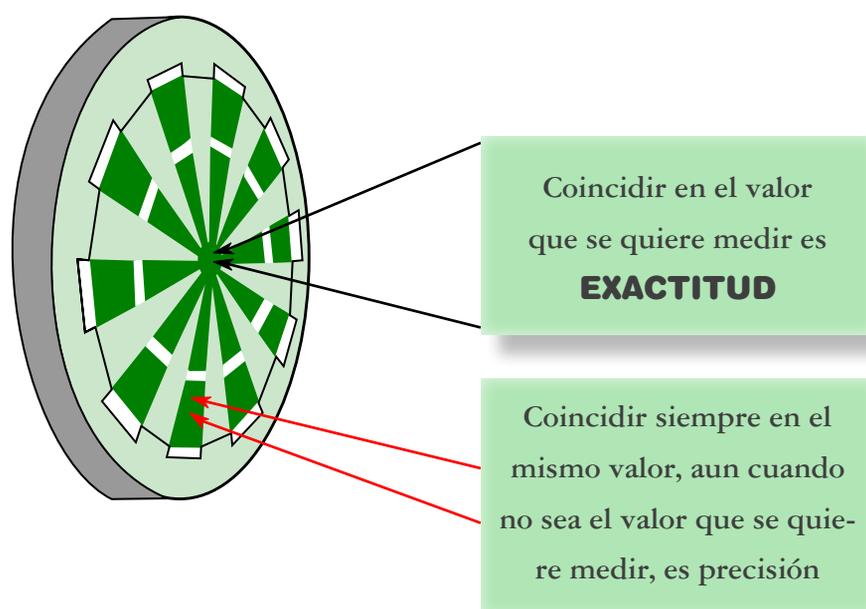




Imagen 6.3. Exactitud y precisión simultáneas



Tipos de errores en la medición

Error aleatorio

Es un error que se produce por eventos inevitables y es imposible de controlar durante el proceso de medición.

Ejemplo 23:

- Medir una magnitud en medio de una tormenta.
- Tomar una sola muestra de una población para medir inferencias.

Error sistemático

Proviene del sistema de medición, bien sea por falta de calibración de los instrumentos o por utilizar un instrumento inapropiado para ese tipo de medida. También se incluye en esta definición la mala práctica que pueda tener el operador.

Ejemplo 24:

- Las balanzas del mercado suelen estar descalibradas y arrojar valores incorrectos.
- Utilizar una regla de 30 cm para medir la longitud de la calle.



Error absoluto

Es la relación entre el valor leído y el valor teórico. Este cálculo se realiza entre barras de valor absoluto; por tanto, su resultado es siempre positivo. Es importante resaltar que su cálculo se hace en todo el conjunto de medidas. Las unidades del error absoluto son las mismas que las de la variable que se está evaluando.

$$E_a = |\text{valor medido} - \text{valor teórico}| \quad (6.1)$$

Error relativo

El error relativo es la relación entre el error absoluto y el valor teórico. Este se expresa en porcentaje y se mide en todo el conjunto de valores.

$$E_r = \frac{E_a}{\text{valor teórico}} \times 100\% \quad (6.2)$$

Resolución

Es el mínimo valor que puede medir un instrumento. Como ya sabemos, existen instrumentos analógicos e instrumentos digitales. En los instrumentos analógicos la resolución viene dada por la apreciación que pueda tener el operador; por ejemplo, en un termómetro de 0°C a 100°C, que tiene una escala de 1°C para cada división, la aguja se fija entre los valores 45°C y 46°C, y el observador asegura que puede medir 0,5°C entre estas dos medidas. En este caso podrá considerarse una resolución de $(0,5/100) = 0,05\%$.

En los instrumentos digitales, la resolución viene dada por el cambio que se ocasiona entre el dígito menos significativo cuando pasa de un valor a otro. Por ejemplo, un termómetro digital cuya escala va de 0°C hasta 100°C, que marca 35,41°C y luego marca 35,42°C. La resolución será $(35,42 - 35,41) / 100 = 0,0001\%$, lo cual no significa que esta sea la exactitud.

Ejemplo 25:

Calcular los errores en el siguiente conjunto de medidas según la tabla 6.1.



Tabla 6.1. Datos de valores para cálculo de error

Valor teórico (°C)	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0
Valor medido (°C)	21,0	25,3	30,3	35,1	40,5	44,7	50,2
	20,2	24,2	31,5	35,0	41,1	45,0	51,3
	20,4	26,1	29,7	36,6	40,0	45,1	51,2

$$V_{m1} = \frac{21,0+20,2+20,4}{3} = 20,5^{\circ}C$$

$$V_{m2} = \frac{25,3+24,2+26,1}{3} = 25,2^{\circ}C$$

$$V_{m3} = \frac{30,3+31,5+29,7}{3} = 30,5^{\circ}C$$

$$V_{m4} = \frac{35,1+35,0+36,6}{3} = 35,6^{\circ}C$$

$$V_{m5} = \frac{40,5+41,1+40,0}{3} = 40,5^{\circ}C$$

$$V_{m6} = \frac{44,7+45,0+45,1}{3} = 44,9^{\circ}C$$

$$V_{m7} = \frac{50,2+51,3+51,2}{3} = 50,9^{\circ}C$$

Observamos en el conjunto de datos que, para cada valor teórico, se han tomado tres medidas que corresponden al valor medido. Por tanto, debemos hacer un promedio de cada conjunto de datos para poder hacer los cálculos respectivos.

Obsérvese que el número de decimales en el cálculo anterior debe coincidir con el número de decimales que maneja la tabla de datos.

Para calcular el error absoluto y relativo:



$$E_{a1} = |20,0 - 20,5|^\circ\text{C} = 0,5^\circ\text{C}$$

$$E_{a2} = |25,0 - 25,2|^\circ\text{C} = 0,5^\circ\text{C}$$

$$E_{a3} = |30,0 - 30,5|^\circ\text{C} = 0,5^\circ\text{C}$$

$$E_{a4} = |35,0 - 35,6|^\circ\text{C} = 0,6^\circ\text{C}$$

$$E_{a5} = |40,5 - 40,0|^\circ\text{C} = 0,5^\circ\text{C}$$

$$E_{a6} = |44,9 - 45,0|^\circ\text{C} = 0,9^\circ\text{C}$$

$$E_{a7} = |50,9 - 50,0|^\circ\text{C} = 0,9^\circ\text{C}$$

Como podemos ver, tenemos siete mediciones en la tabla anterior y, por tanto, tenemos siete errores absolutos.

De la misma manera se procede para el cálculo del error relativo:

$$E_{r1} = \frac{0,5^\circ\text{C}}{20,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 2,5\%$$

$$E_{r2} = \frac{0,5^\circ\text{C}}{25,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 2,0\%$$

$$E_{r3} = \frac{0,5^\circ\text{C}}{30,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 1,6\%$$

$$E_{r4} = \frac{0,6^\circ\text{C}}{35,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 1,7\%$$

$$E_{r5} = \frac{0,5^\circ\text{C}}{40,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 1,3\%$$

$$E_{r6} = \frac{0,9^\circ\text{C}}{45,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 2,0\%$$

$$E_{r7} = \frac{0,9^\circ\text{C}}{50,0^\circ\text{C}} \times 100\% = 1,8\%$$



Ejercicios propuestos de cálculo de errores

1. En un experimento de caída libre, se midió la gravedad a través de cálculos matemáticos, y se obtuvieron los siguientes datos: $g_1 = 9,85 \text{ m/s}^2$, $g_2 = 9,72 \text{ m/s}^2$, $g_3 = 9,83 \text{ m/s}^2$, $g_4 = 9,79 \text{ m/s}^2$, $g_5 = 9,87 \text{ m/s}^2$, $g_6 = 9,78 \text{ m/s}^2$, $g_7 = 9,82 \text{ m/s}^2$, $g_8 = 9,84 \text{ m/s}^2$, $g_9 = 9,77 \text{ m/s}^2$, $g_{10} = 9,79 \text{ m/s}^2$. Determine los errores absoluto y relativo presentes en el experimento.
2. En un experimento de física, se obtuvieron los siguientes resultados (tabla 6.2):

Tabla 6.2. Datos del ejercicio de cálculo de errores

Valor teórico (m)	Valores experimentales (m)
120,0	122,5; 123,2; 124,1; 120,6; 121,2
135,0	134,8; 132,7; 135,9; 136,1; 136,9
150,0	151,2; 156,2; 151,4; 150,8; 150,5
165,0	165,8; 164,2; 164,3; 166,8; 167,0
180,0	181,0; 182,5; 181,6; 183,2; 180,6

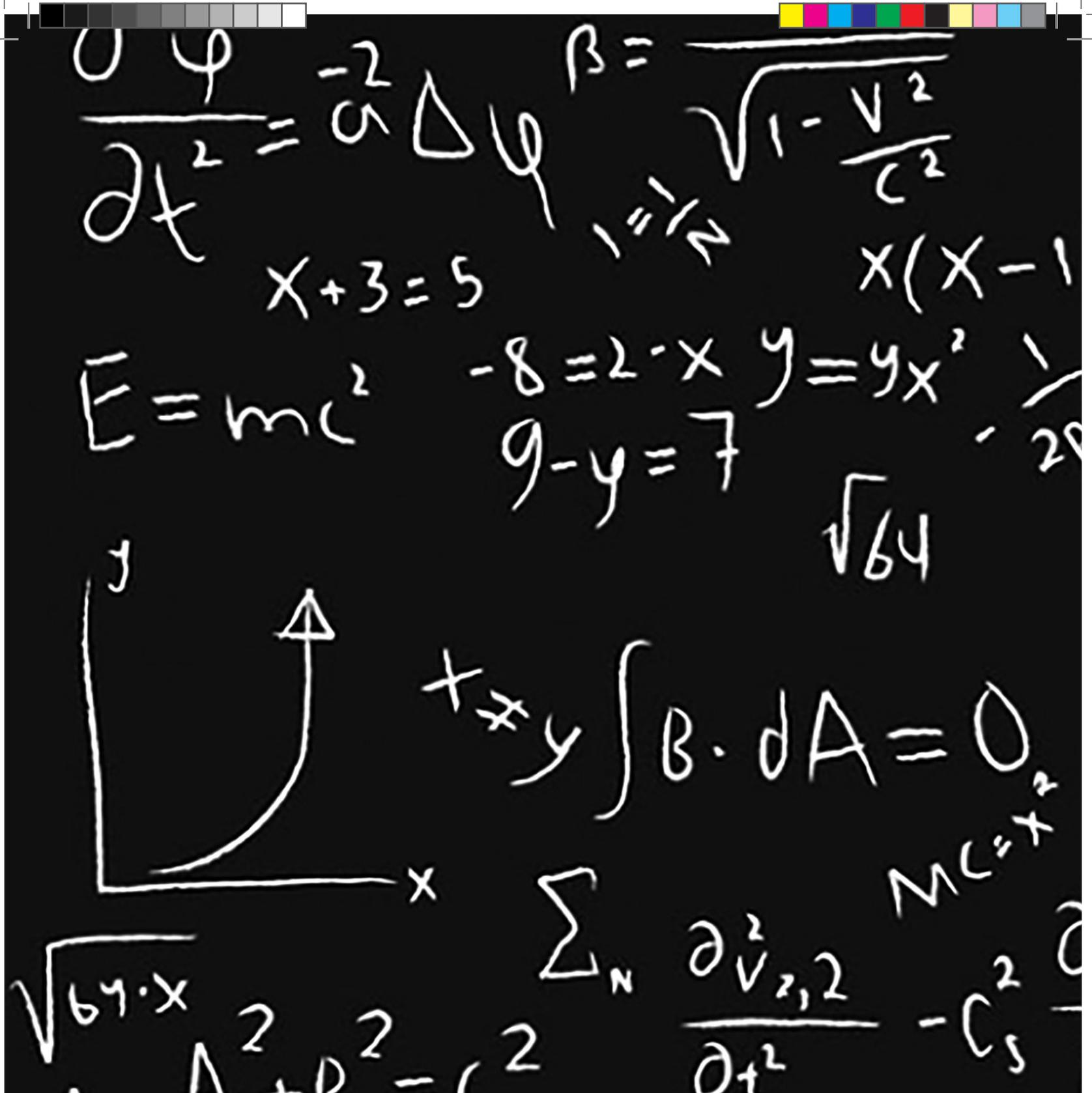
Calcula los errores absoluto y relativo.

3. Obtén los errores absoluto y relativo en los siguientes casos.
 - a. 3,5 m como longitud de un terreno que mide realmente 3,59 m.
 - b. 60 m como la distancia entre dos postes que están situados a 59,91 m.
3. En la medida de 100 m se ha cometido un error de 1 mm, y en 250 km, uno de 300 m. ¿Qué error relativo es mayor?
4. Como medida de un radio de 15 dm hemos obtenido 150,7 cm. Calcula el error absoluto y el relativo.
5. Para una longitud de 525 km se obtuvo una medida de 524 800 m. Determina el error absoluto y relativo.

Nombre:

.....

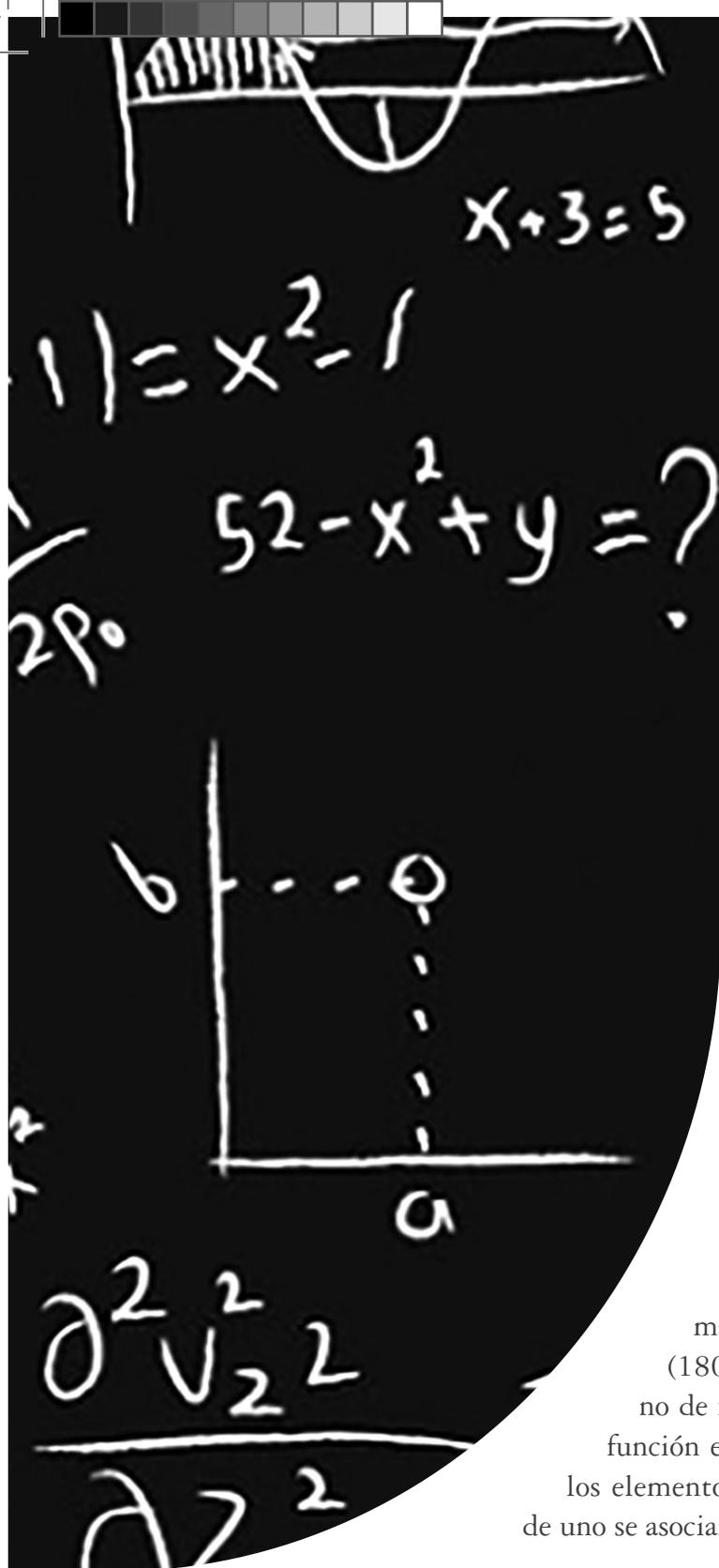
Calificación:



Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos aspectos importantes de la representación gráfica de datos
- ▶ Realizaremos ejercicios de graficación





Capítulo 7

Gráficas y funciones

Historia

René Descartes (1596-1650) es considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, ya que aportó importantes teorías a la revolución científica. En el año 1637, formuló el concepto de «función» para describir la relación x^n de la variable x .

En el año 1673, surge el manuscrito *De functionibus plagulae quattuor*, escrito por G. W. Leibniz, quien emplea el término función en un sentido matemático y lo introduce en el cálculo infinitesimal.

En el año 1837, el matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) introdujo el concepto moderno de función; en sus escritos especifica que una función es una relación cualquiera que existe entre los elementos de dos conjuntos, donde los elementos de uno se asocian con los del otro.

Al principio, el concepto de función se veía como la expresión que relaciona las variables de algún fenómeno físico demostrable. Sin embargo, más adelante se pudo observar que podían relacionarse variables más complejas no asociadas a algún fenómeno físico o que se presentaban funciones continuas sin derivadas en ningún punto.

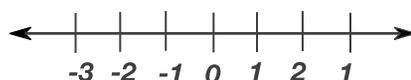


Sistemas de coordenadas espaciales

En el estudio de los fenómenos físicos se requiere para el análisis de los datos obtenidos, en muchos casos, que estos puedan ser representados gráficamente sobre un sistema que podamos manejar e interpretar de forma adecuada.

Cuando estamos estudiando el comportamiento de una característica física en particular, llamémosla variable, podemos representar su desenvolvimiento sobre una recta real, como se observa en la figura 7.1.

Figura 7.1. La recta real



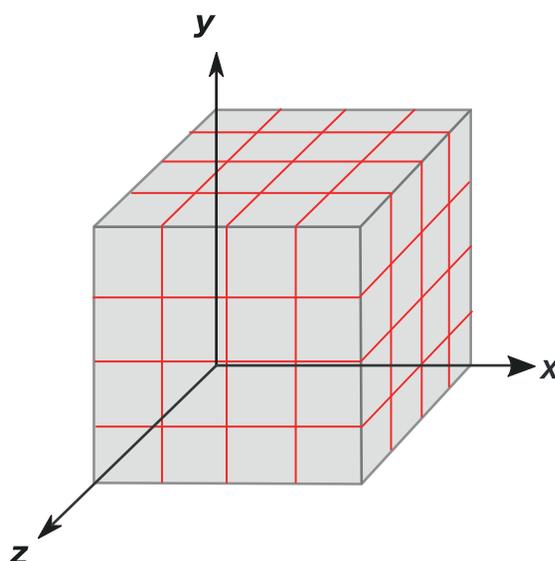
Cuando se estudia el comportamiento de dos variables, una de las cuales es dependiente de la otra, podemos hacer uso del plano cartesiano del capítulo anterior.

Cuando se estudian variables en tres dimensiones usamos el sistema de referencia espacial, comúnmente llamado "el espacio", que posee tres ejes denominados x , y y z , como podemos ver en la figura 7.2.

Ejemplo 26:

Representar en el espacio el punto $A(-4; -4,5)$ (figura 7.2).

Figura 7.2. Espacio tridimensional





Construcción de una gráfica

En general, para nuestro estudio de física, usaremos el plano cartesiano. En él aparecerán representadas dos variables: una que toma valores aleatorios y que denominamos *variable independiente*, y otra que asume un valor según la variable independiente; por ello se la suele llamar *variable dependiente*. La variable independiente se coloca por lo general en el eje de las abscisas o eje x, y la variable dependiente en el eje de las ordenadas o eje y. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 27:

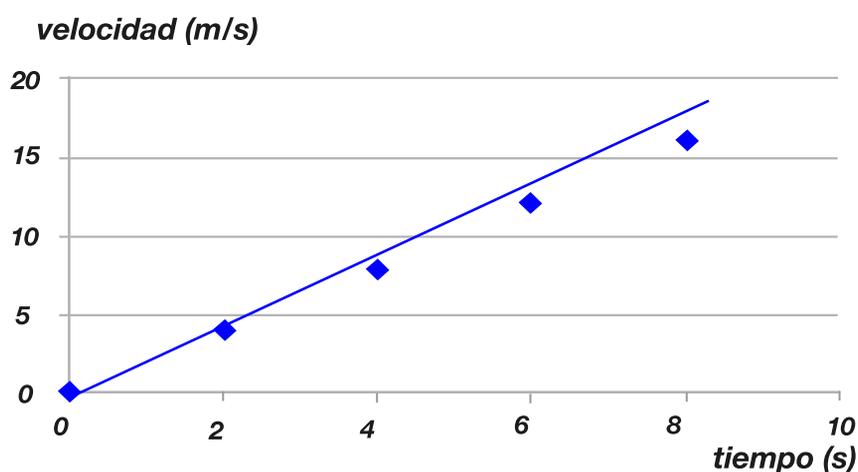
Un móvil, cada cierto tiempo, cambia el valor de su velocidad como se muestra en la tabla 7.1.

Tabla 7.1. Valores velocidad-tiempo para el ejemplo

Tiempo (s)	2	4	6	8
Velocidad (m/s)	4	8	12	16

Para construir la gráfica vamos marcando punto a punto. El tiempo se ubica siempre en el eje x y la otra variable, que en este caso es la velocidad, se ubica en el eje y (figura 7.3).

Figura 7.3. Gráfica velocidad-tiempo





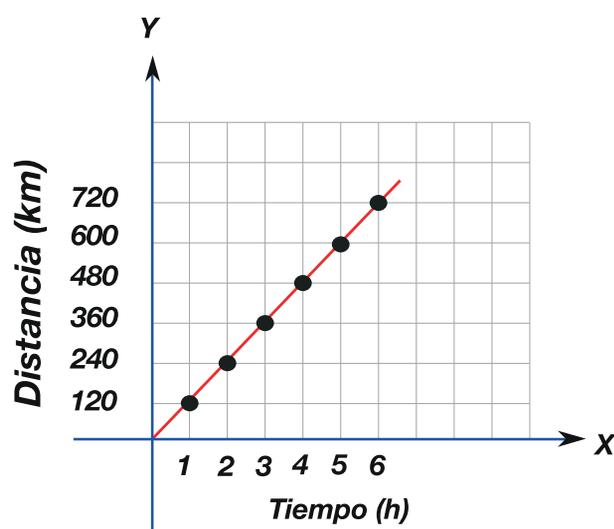
Como podemos observar, a medida que aumenta el tiempo, va aumentando la velocidad del móvil. A esto se lo denomina una correspondencia o proporcionalidad directa.

Proporcionalidad directa

Decimos que las magnitudes de dos variables son directamente proporcionales cuando la razón o cociente entre ellas es igual a una constante, denominada *constante de proporcionalidad*. Si dos magnitudes A y B son directamente proporcionales, se cumple que $(B/A) = C$, donde C es la constante de proporcionalidad. De la expresión anterior podemos despejar B y queda que $B = C \cdot A$. Si lo llevamos al plano cartesiano, tendremos que $y = m \cdot x$, donde $B = y$, $A = x$ y $C = m$.

También se puede notar que la expresión $y = m \cdot x$ describe a una recta que pasa por el origen del plano y cuyo recorrido es ascendente siempre y cuando m sea positiva. En la la figura 7.4 se se puede observar una relación de proporcionalidad directa.

Figura 7.4. Proporcionalidad directa



Proporcionalidad inversa

Decimos que las magnitudes de dos variables poseen una proporcionalidad inversa cuando su producto da como resultado una constante. Esto se puede expresar como $y \cdot x = k$, donde k es la *constante de proporcionalidad inversa*.

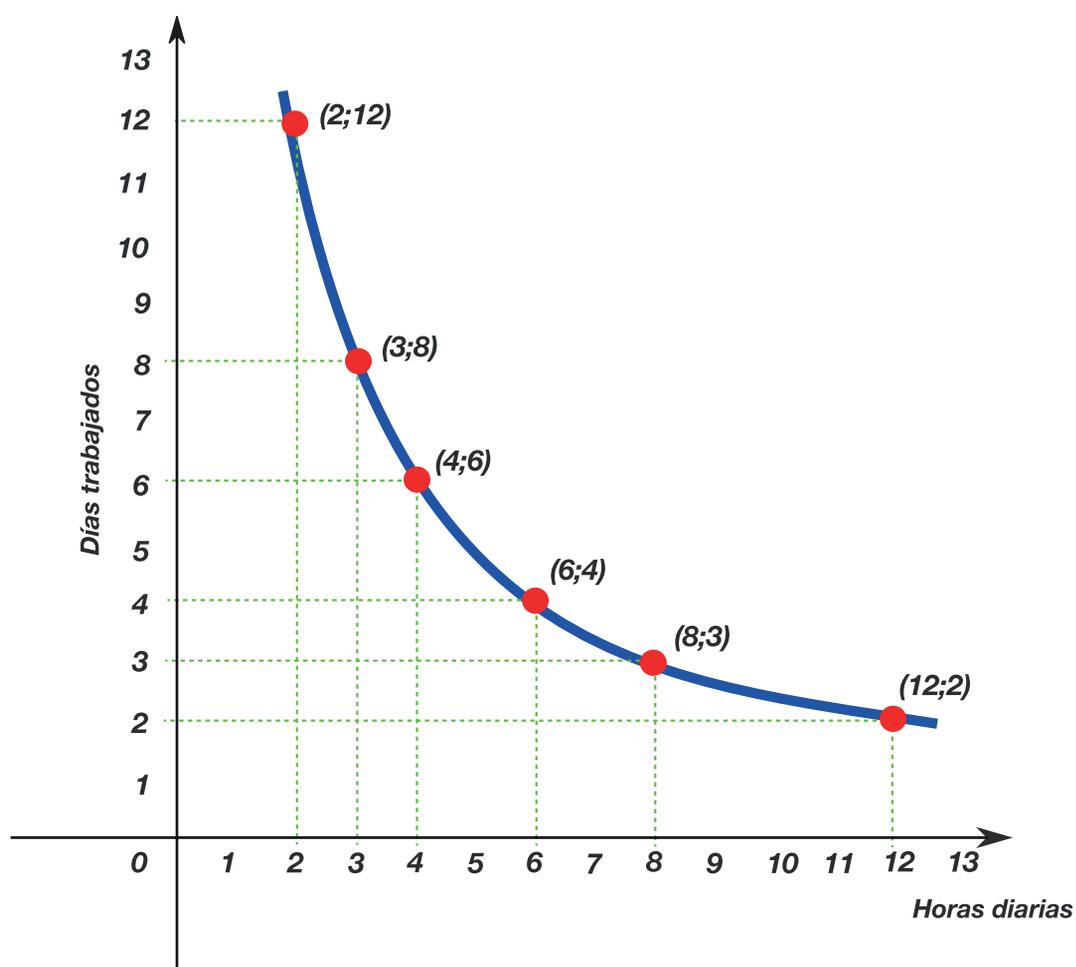


De la expresión anterior, podemos despejar y y resulta que:

$$y = (k / x) \quad (7.1)$$

En la figura 7.5, se puede observar una relación de proporcionalidad inversa.

Figura 7.5. Proporcionalidad inversa





Otro tipo de proporcionalidad

Relación gráfica de línea recta

Es similar a la proporcionalidad directa en el sentido que la relación es equivalente a una línea recta; sin embargo, a pesar de que si una variable aumenta la otra también lo hace, no existe relación de proporcionalidad entre las variables.

La expresión matemática de esta relación sería equivalente a:

$$y = mx + b \quad (7.2)$$

donde b es una constante.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 28:

Evalúa en la tabla de datos la proporcionalidad (tabla 7.2).

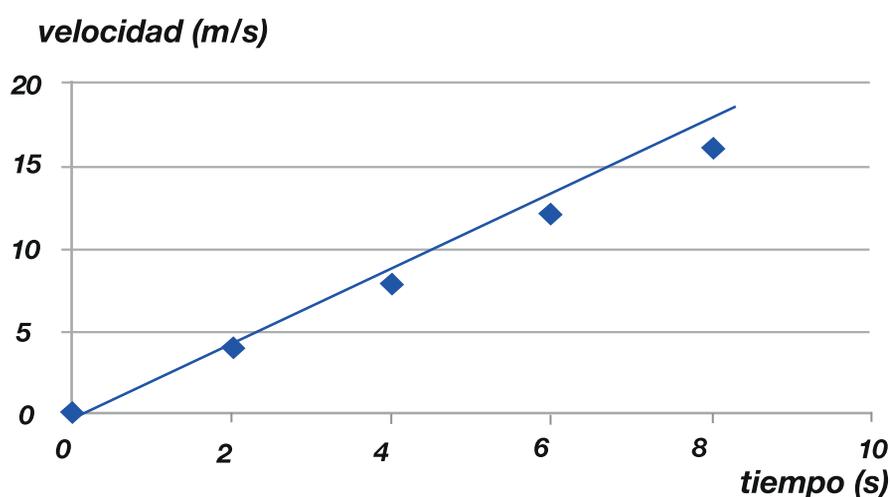
Tabla 7.2. Datos del ejemplo de proporcionalidad

Tiempo (s)	0	2	4	6
Velocidad (m/s)	4	8	12	16

En la tabla anterior, se puede observar que, a medida que los valores del tiempo van en aumento, los valores de la velocidad también crecen. La relación entre los datos del tiempo es de 2, mientras que la relación entre los datos de velocidad es de 4. Eso nos demuestra que se trata de una línea recta. Si graficamos, obtenemos la representación lineal de la figura 7.6.



Figura 7.6. Gráfica velocidad-tiempo del ejemplo



Proporcionalidad cuadrática

Algunas variables se relacionan de tal manera que, cuando una variable aumenta, la otra aumenta el cuadrado del valor. Esto se denomina proporcionalidad cuadrática.

Ejemplo 29:

Evalúa los datos de la tabla 7.3 y di qué tipo de proporcionalidad se presenta.

Al observar la tabla citada podemos notar que los datos del tiempo (s) van de forma creciente de uno a uno, mientras que los datos de la velocidad (m/s) van de forma creciente también, pero guardando una relación cuadrática con el tiempo (véase capítulo 5: Cinemática).

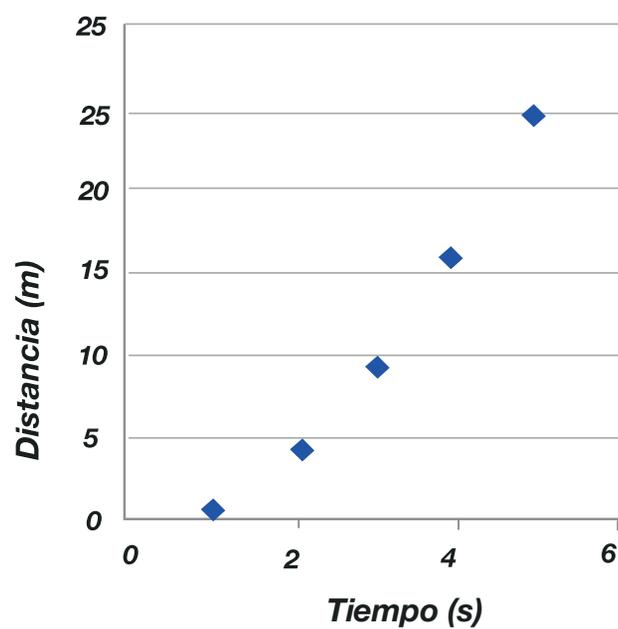
En este ejemplo se ha utilizado la ecuación $x = \frac{1}{2} at^2$ y se ha considerado $a = 2 \text{ m/s}^2$. Ver figura 7. 7.

Tabla 7.3. Proporcionalidad cuadrática

Tiempo (s)	1	2	3	4	5
Distancia (m)	1	4	9	16	25



Figura 7.7. Gráfica de proporcionalidad cuadrática



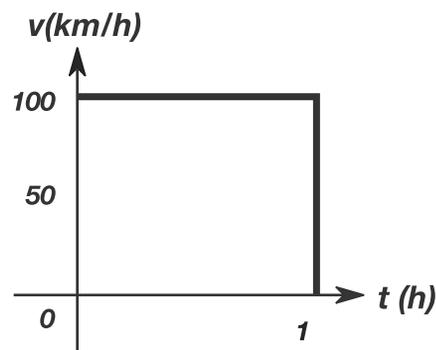
Obsérvese en la figura que la curva va de abajo hacia arriba, describiendo una línea que no es recta.



Ejercicios propuestos de análisis de gráficas

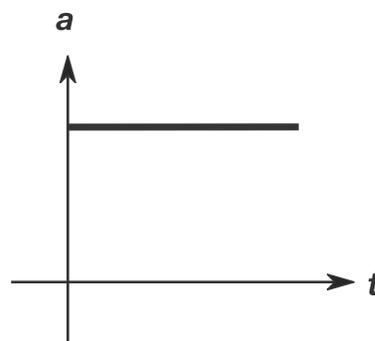
1. Observa la figura 7.8 e indica mediante un análisis qué suceso ocurre.

Figura 7.8. Gráfica velocidad-tiempo



- El tiempo se detuvo en uno.
 - El tiempo siguió corriendo, pero sin registrar valores de aceleración.
 - La velocidad del cuerpo continúa en 100 km/h.
 - El móvil al llegar al primer segundo pierde toda su velocidad.
2. Observa la figura 7.9 e indica qué está sucediendo.

Figura 7.9. Relación aceleración-tiempo



- La aceleración se mantiene constante.
- El objeto mantiene una velocidad constante.

Nombre:

.....

Calificación:



- c. El objeto reduce su velocidad de forma constante.
 - d. El tiempo es infinito.
- 3. Cuando se quiere estudiar en una gráfica el comportamiento de una sola magnitud física que está variando, ¿qué sistema gráfico es el más recomendable?
 - a. El plano cartesiano.
 - b. Una tabla de valores.
 - c. La recta real.
 - d. El plano espacial.
- 4. Si estamos estudiando la relación existente entre dos variables pertenecientes a magnitudes físicas, ¿qué sistemas de coordenadas es el más adecuado?
 - a. El plano espacial.
 - b. La recta real.
 - c. El plano cartesiano.
 - d. Una tabla de valores.

Ejercicios de proporcionalidad

- 1. ¿Cuándo se cumple una relación de proporcionalidad directa entre dos variables P independiente y T dependiente?
 - a. Cuando $P = k \cdot T$, donde k es una constante.
 - b. Cuando $T = k \cdot P$, donde k es una constante.
 - c. Cuando $(T/P) = k$, donde k es una constante.
 - d. Cuando $(P/T) = k$, donde k es una constante.

Nombre:

.....

Calificación:

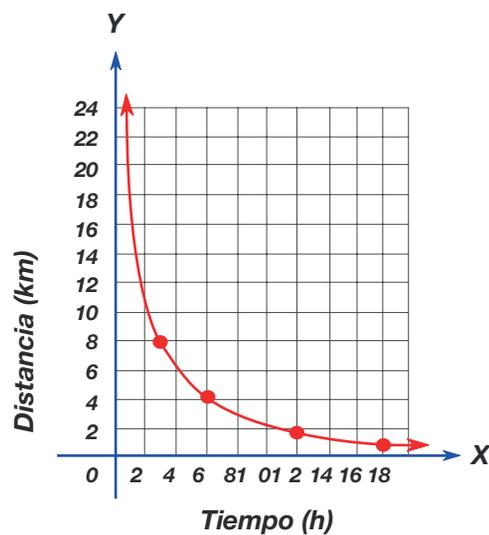


2. Cuándo se cumple una relación de proporcionalidad inversa entre dos variables M independiente y N pendiente?
 - a. Cuando $M = c \cdot N$ donde c es una constante.
 - b. Cuando $N = c \cdot M$ donde c es una constante.
 - c. Cuando $N \cdot M = k$ donde k es la constante de proporcionalidad.
 - d. Cuando $M = k \cdot N$ donde k es la constante de proporcionalidad.

3. En la figura 7.10, indique el tipo de relación existente.
 - a. Proporcionalidad inversa con constante $k = 12$.
 - b. Proporcionalidad inversa con constante $k = 9$.
 - c. Proporcionalidad inversa con constante $k = 24$.
 - d. Proporcionalidad inversa con constante $k = 6$.

Figura 7.10. Gráfica de proporcionalidad

X	3	6	12	1
Y	8	4	2	24



Nombre:

.....

Calificación:



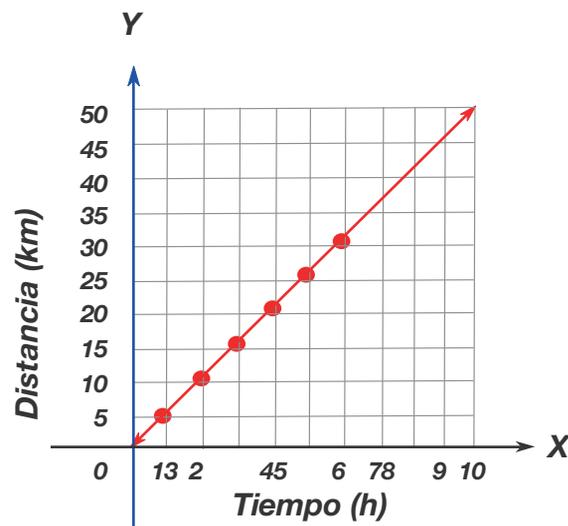
Fundamentos de Mecánica para Ingeniería

Teoría y Práctica

4. En una relación lineal o de línea recta donde la misma no pasa por el origen ($y = mx + b$), ¿se cumple la proporcionalidad directa?
- No, porque $x \cdot y$ varía.
 - No, porque (y/x) varía.
 - No, porque $(x+y)/m$ varía.
 - No, porque m varía.
5. Observa la figura 7.11 e indica el valor de la constante de proporcionalidad directa.
- $k = 1$
 - $k = 10$
 - $k = 5$
 - $k = 3$

Figura 7.11. Gráfica de proporcionalidad directa

X	12		34		56	
Y	51	01	52	0	25	30



Nombre:

.....

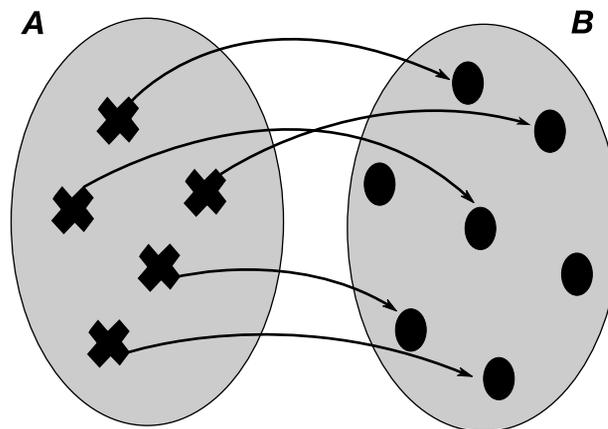
Calificación:



Nociones básicas de funciones

Una función se define como la correspondencia de los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto.

Figura 7.12. Representación gráfica de una función



En la figura 7.12 se observa que los elementos del conjunto A se relacionan de forma directa con los elementos del conjunto B.

En matemática, los elementos de una función son los siguientes:

Dominio: dado por el conjunto A, también llamado conjunto de partida.

Codominio: determinado por el conjunto B, también llamado conjunto de llegada.

Rango: está determinado por todos los elementos del codominio que tienen correspondencia con un elemento del dominio. También se lo conoce como imagen de la función.

Existen algunas reglas importantes, indispensables para el cálculo de funciones:

- A todo elemento del dominio se le puede asociar un elemento del codominio.
- Ningún elemento del dominio puede quedarse sin asociación en el codominio.
- Ningún elemento del dominio puede tener más de un elemento asociado en el codominio.



Expresiones de una función

Una función se expresa en símbolos de la siguiente manera:

$$f: A \rightarrow B \quad (7.3)$$

El dominio se denota por D_f , y viene dado por el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, es decir, son todos aquellos valores para los cuales la función tiene sentido.

A los elementos del rango se les llama imágenes, y se los denota como R_f .

Leonard Euler (1707-1783) introdujo en 1734 el símbolo $f(x)$ para referirse a la imagen de x dada por una función f .

La notación $y = f(x)$ señala que y es una función de x , es decir, que y es la variable dependiente y por tanto x es la variable independiente.

Ejemplo 30:

Sea el siguiente conjunto de datos, determina el dominio, el rango y la expresión de la función tabla 7.4.

Tabla 7.4. Relación de nombres y estaturas

Nombre	Laura	Ricardo	Sofía	Ángel	Adrián	Mary
Altura (m)	1,65	1,34	1,68	1,77	1,87	1,70

En la tabla 7.4, se observa la relación entre los nombres de las personas y su altura, por tanto, puede deducirse lo siguiente:

Dominio: {Laura, Ricardo, Sofía, Ángel, Adrián, Mary}

Rango: {1,65 m; 1,34 m; 1,68 m; 1,77 m; 1,87 m; 1,70 m}



La expresión de la función será entonces:

$$f(\text{Laura}) = 1,65 \text{ m}$$

$$f(\text{Ricardo}) = 1,34 \text{ m}$$

$$f(\text{Sofía}) = 1,68 \text{ m}$$

$$f(\text{Ángel}) = 1,77 \text{ m}$$

$$f(\text{Adrián}) = 1,87 \text{ m}$$

$$f(\text{Mary}) = 1,70 \text{ m}$$

Sin embargo, una función se puede expresar de varias formas: a través de una gráfica, una ecuación, una expresión verbal o un conjunto de valores relacionados entre sí.

Para encontrar el dominio y el rango de una función se deben evaluar las características que ella posee. Para determinar el dominio, se recomienda despejar la variable dependiente; mientras que, para el rango, se recomienda despejar la variable independiente. Una vez que se tengan los despejes necesarios, se evalúa el comportamiento de cada uno. Básicamente consiste en determinar para cuáles valores de una variable existe la otra variable.

Ejemplo 31:

Determinar el dominio y el rango de la siguiente función:

$$y = f(x) = 5x - 2$$

Solución:

Para determinar el dominio, evaluamos la variable dependiente y . Se observa que la función existe para todos los números reales: $D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Para determinar el rango, evaluamos la variable independiente x .

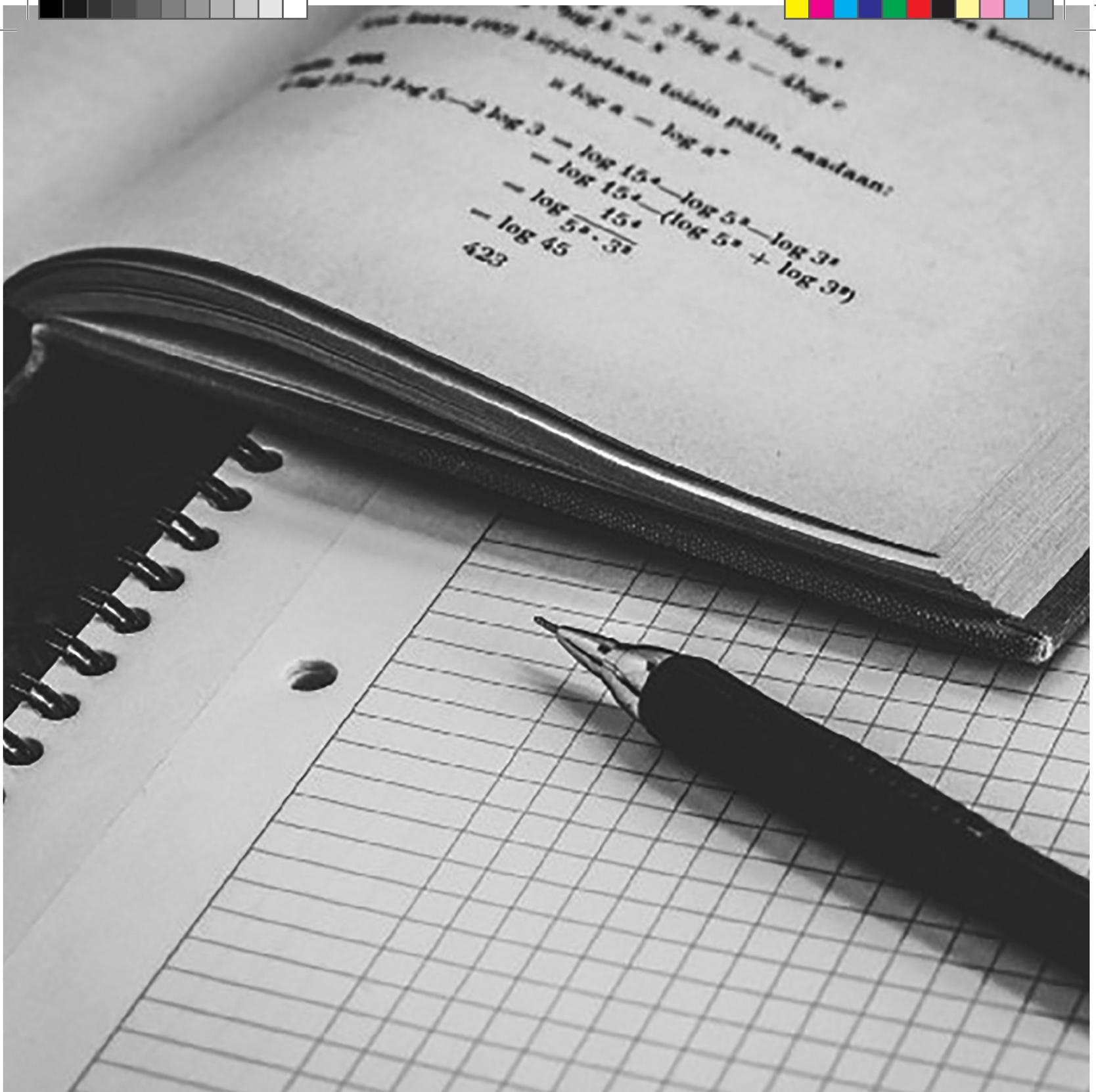
$$x = \frac{y + 2}{5} \quad \text{Observamos que los valores de } x \text{ existen para todos los reales, por tanto el rango de la función es } R_f = \mathbb{R}.$$

Para determinar el dominio despejamos y

$$y = 5x - 2 \quad \text{Observamos que los valores de } y \text{ existen para todos los reales.}$$

También:

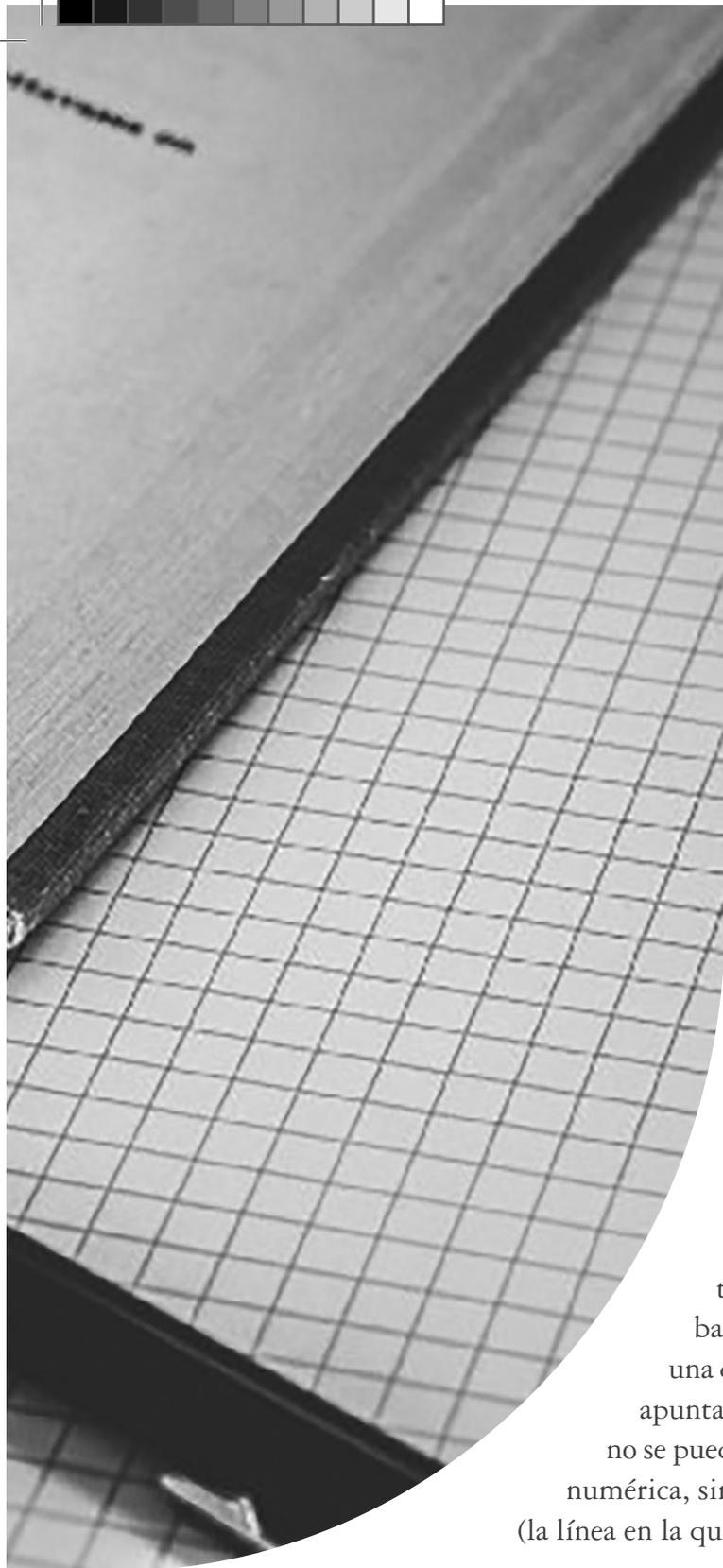
$$D_f = (-\infty, +\infty)$$



Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Realizaremos un repaso sobre el álgebra vectorial
- ▶ Repasaremos ejercicios de álgebra vectorial





Capítulo 8

Repaso de álgebra vectorial

Tal como las letras permiten el conocimiento de cada palabra, y como los números permiten comprender cantidades, los vectores permiten comprender ciertos fenómenos naturales facilitando su entendimiento y su análisis. Por ejemplo, una fuerza como el peso de una masa de 10 kg, debido a la aceleración de la gravedad, genera una fuerza de aproximadamente 98 newtons, cuyo valor puede evaluarse en una balanza simple. Sin embargo, el peso tiene una dirección vertical a la horizontal y su efecto apunta al centro de la Tierra. Claramente la fuerza no se puede comprender solamente con una cantidad numérica, sino que además debemos saber su dirección (la línea en la que actúa) y hacia dónde o qué sentido posee.

El concepto de vectores posee un amplio rango de aplicación.

En esta obra se considerará el vector como herramienta para explicar los fenómenos físicos correspondientes al estudio de la mecánica; sus fundamentos se tomarán en cuenta en capítulos posteriores.

El vector

En el estudio de la mecánica, existen algunas *magnitudes vectoriales* de frecuente empleo, como fuerza, desplazamiento, velocidad, aceleración, momento, entre otras.



Existen otras cantidades como la masa, área, volumen, energía, etc.; estas últimas representadas por una sola cantidad numérica y conocidas como *magnitudes escalares*.

Figura 8.1. Componentes de un vector



Los vectores se caracterizan por poseer magnitud, dirección y sentido (figura 8.1). La magnitud nos da la idea de la dimensión del vector; así, en este texto, una línea pequeña representará una fuerza pequeña y una línea grande, lo correspondiente. La dirección es la línea imaginaria a la cual se alinea el vector. El sentido es caracterizado por una flecha que indica en qué sentido (sobre la dirección) se representará al vector (por ejemplo, arriba o abajo, derecha o izquierda).

Clasificación de los vectores

Los vectores pueden clasificarse considerando su punto de aplicación, su línea de acción y sentido. Se proponen cinco categorías: vectores fijos o ligados, libres, deslizantes, iguales y vector negativo (figura 8.2).

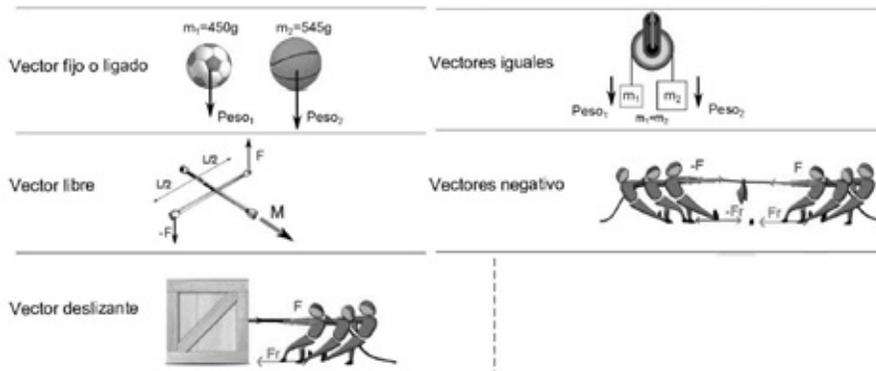
Vectores fijos o ligados.- Ejercen su acción en un punto específico de un objeto o partícula en análisis. Por ejemplo, el peso actúa con referencia al centro de gravedad de un objeto.

Vectores libres.- Se pueden representar como vectores que se mueven libres en el espacio. Por ejemplo, los pares o momentos. Estos a su vez dependen del punto de aplicación de la fuerza en el sistema.

Vectores deslizantes.- Pueden moverse, resbalar o deslizarse sobre una línea de acción, como por ejemplo en una cuerda tensionada: el vector puede representarse en todo el largo de la longitud de la cuerda, alineándola con la fuerza de tracción.



Figura 8.2. Clasificación de los vectores según su punto de aplicación

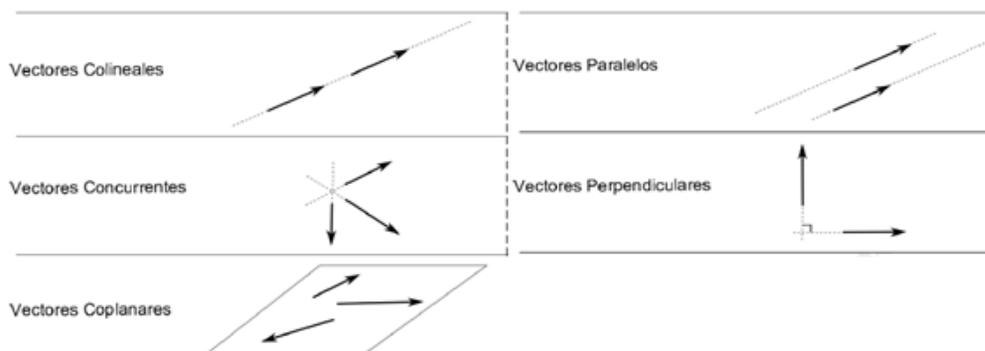


Vectores iguales.- Son vectores de la misma magnitud, dirección y sentido aun si tuvieran diferentes puntos de aplicación. Pueden representarse con la misma nomenclatura.

Vector negativo.- Posee la misma magnitud y dirección de un vector P , pero tiene sentido contrario, lo que determina el vector $-P$. De esta manera: $P + (-P) = 0$.

Adicionalmente se plantea otra clasificación para los vectores, relativa a su posición respecto de otros vectores: colineales, concurrentes, coplanares, paralelos y perpendiculares.

Figura 8.3. Clasificación de los vectores relativa a su posición



Vectores colineales.- Poseen como dirección la misma recta, aunque puede variar su magnitud y dirección.



Vectores concurrentes.- Los vectores intersecan en un punto común único.

Vectores coplanares.- Sus direcciones se contienen en un mismo plano.

Vectores paralelos.- Sus direcciones son líneas paralelas.

Vectores perpendiculares.- Las direcciones de estos vectores son perpendiculares.

La figura 8.3 ilustra las situaciones antes abordadas.

Operaciones con vectores

A diferencia de los números en el álgebra, los vectores requieren de ciertas consideraciones en vista de sus tres componentes: magnitud, dirección y sentido. A continuación, se abordan los fundamentos para las operaciones más empleadas en el estudio y desarrollo de la mecánica para ingenieros.

Suma o adición de vectores

Esta operación vectorial permite la solución de problemas sencillos relativos al empleo de fuerzas en sistemas estáticos o en reposo.

Existen un método analítico y algunos métodos gráficos para realizar esta operación.

Dado que un vector se representa desde un origen de referencia hasta una posición final, se puede considerar que el origen O de los vectores P , Q y R y sus extremos A , B y C , respectivamente, definen los vectores tanto para el espacio bidimensional X y Y así como para el espacio tridimensional X , Y y Z , en las direcciones i , j y k .

En la figura 8.4, se observan ejemplos de vectores en el plano y en el espacio. Se definen los siguientes vectores a partir de las coordenadas respectivas en cada eje:

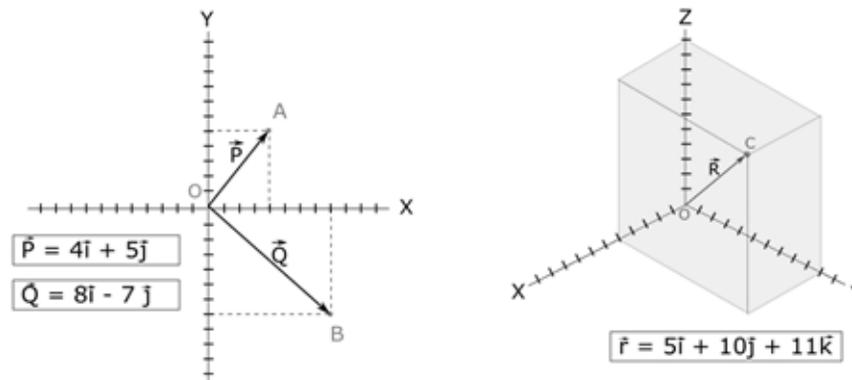
$$P^{\rightarrow} = 4i^{\rightarrow} + 5j^{\rightarrow}$$

$$Q^{\rightarrow} = 8i^{\rightarrow} - 5j^{\rightarrow}$$

$$R^{\rightarrow} = 5i^{\rightarrow} + 10j^{\rightarrow} + 11k^{\rightarrow}$$



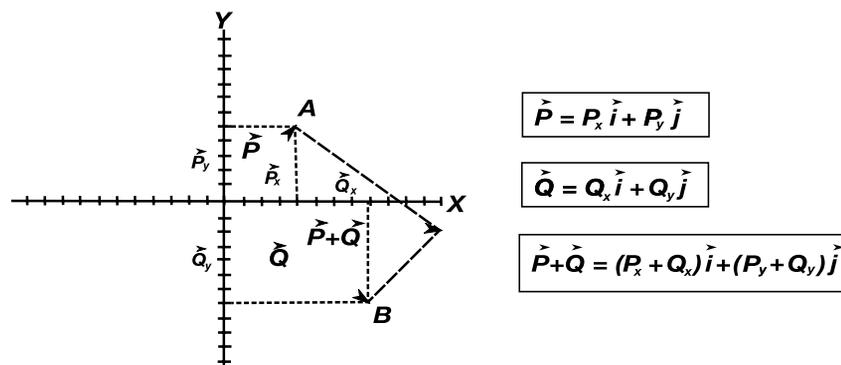
Figura 8.4. Ejemplo de vectores en el plano y en el espacio



Método analítico

Dado que el vector P posee una componente P_x y otra P_y , y dado que Q posee componentes Q_x y Q_y , entonces la suma de vectores $P + Q$ tendrá una componente en X que corresponde a la suma de las componentes $P_x + Q_x$, mientras que su componente en Y se hallará de la suma de $P_y + Q_y$ (figura 8.5).

Figura 8.5. Componentes que suman un vector



Las mismas consideraciones se toman en cuenta para vectores en el espacio tridimensional, en el que deberán sumarse además sus coordenadas en el tercer eje, Z .

La resta de dos vectores se realizará mediante la resta de sus componentes respectivas; por tal motivo la suma y resta poseen propiedades similares (tabla 8.1).



Tabla 8.1. Propiedades de los vectores

1	$P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow} = Q^{\rightarrow} \cdot P^{\rightarrow}$	Ley conmutativa
2	$k(Q^{\rightarrow} + R^{\rightarrow}) = (kQ^{\rightarrow}) \cdot R^{\rightarrow}$	Ley asociativa
3	$P^{\rightarrow}(Q^{\rightarrow} + R^{\rightarrow}) = P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow} + P^{\rightarrow} \cdot R^{\rightarrow}$	Ley distributiva
4	$(m + n)P^{\rightarrow} = mP^{\rightarrow} + nP^{\rightarrow}$	Ley distributiva escalar
5	$P^{\rightarrow} + 0 = P^{\rightarrow}$	Existencia del cero
6	$P^{\rightarrow} + (-P^{\rightarrow}) = 0$	Existencia del inverso aditivo

Ejemplo 32:

Dados los vectores $P^{\rightarrow} = 9i^{\rightarrow} + 4j^{\rightarrow}$ y $Q^{\rightarrow} = 2i^{\rightarrow} - 5j^{\rightarrow}$; determine la suma de los vectores $Q^{\rightarrow} + P^{\rightarrow}$.

Aplicando el método analítico planteamos que:

$$Q^{\rightarrow} + P^{\rightarrow} = (Q_x + P_x) i^{\rightarrow} + (Q_y + P_y) j^{\rightarrow}$$

$$Q^{\rightarrow} + P^{\rightarrow} = (2 + 9) i^{\rightarrow} + (-5 + 4) j^{\rightarrow}$$

$$Q^{\rightarrow} + P^{\rightarrow} = 11 i^{\rightarrow} - j^{\rightarrow}$$

Método del paralelogramo

Dados dos vectores P y Q, la suma de estos se obtiene gráficamente de acuerdo con el método del paralelogramo. Se traslada uno de los vectores al origen del otro, formando un paralelogramo de lados P y Q y otros dos lados con paralelas a cada uno de los dos vectores anteriores. El vector P+Q partirá del origen común de los vectores trazando la diagonal del paralelogramo y apuntando hacia la intersección de las líneas paralelas (figura 8.6).

Figura 8.6. Método del paralelogramo





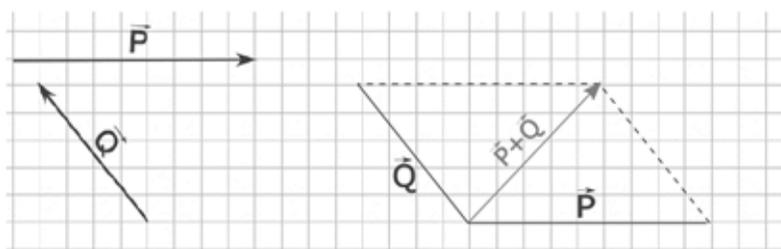
La adición de vectores por este método comparte las mismas propiedades de la tabla 2, por tanto, al ser conmutativa tanto $P + Q$ como $Q + P$ obtendrán el mismo vector resultante.

A continuación, en la figura 8.7, se requiere la aplicación gráfica del método del paralelogramo para los dos vectores dados.

Ejemplo 33:

Dados gráficamente los vectores P y Q (figura 8.7), y empleando el método del paralelogramo, trasladamos el vector Q al origen de P . Luego, debemos trazar líneas paralelas para cerrar el paralelogramo como en la figura. El vector resultante $P+Q$ partirá del origen común hasta la intersección de las líneas paralelas.

Figura 8.7. Ejemplo del método del paralelogramo

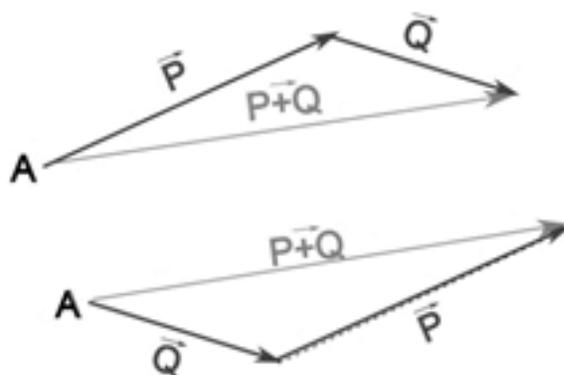


Método del triángulo

Este método considera la mitad del paralelogramo explicado en el método anterior. Se han considerado los vectores P y Q de la figura 8.8. Como se describe gráficamente, se ubicará el inicio de cualquiera de los dos vectores al final del otro vector. Se cerrará el triángulo mediante una línea que parte del origen del primer vector hasta el final del segundo. Dado que, al igual que en los métodos anteriores, las propiedades de la adición no han cambiado, el vector resultante $P+Q$ deberá hallarse independientemente de cual vector se elija primero para aplicar este método.

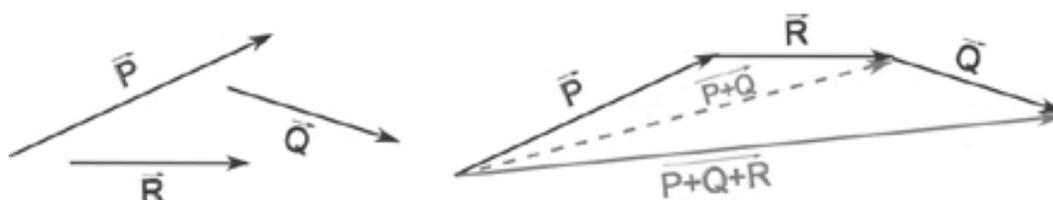


Figura 8.8. Método del triángulo



En el caso de requerir la suma de más de dos vectores se aplicará la denominada regla del polígono. Para ello, como se observa en la figura 8.9, se pueden determinar múltiples sumas empleando las consideraciones del método del triángulo.

Figura 8.9. Método del polígono



Considerando la figura 8.9, $P+Q$ se obtiene con el método del triángulo, mientras que, ubicando el vector Q al final, se genera un polígono que cierra con los vectores P , Q y R y su respectiva suma $P + Q + R$.

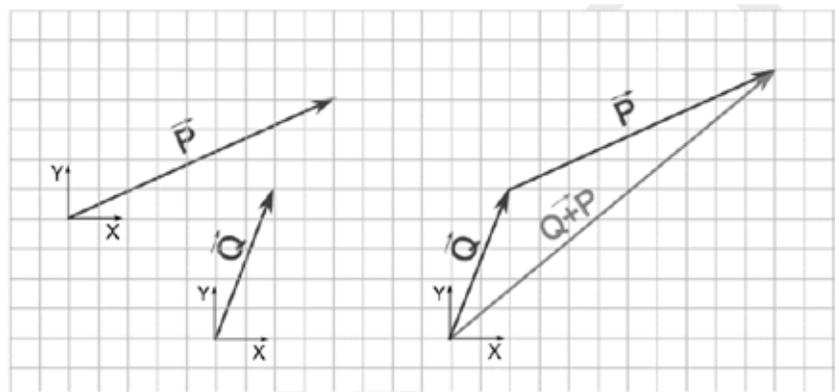
Es recomendable emplear el método del polígono en vez del método del paralelogramo cuando existen más de dos vectores, ya que evita realizar múltiples líneas de referencia.



Ejemplo 34:

Dados gráficamente los vectores P y Q (figura 8.10), y empleando el método del triángulo, deberás trasladar el vector P al origen de Q , luego trazar una línea desde el origen de Q hasta el final de P y hallar el vector resultante $Q+P$.

Figura 8.10. Ejemplo del método del triángulo



Producto de un escalar por un vector

Esta operación comparte similitud con la suma algebraica dado que, si a un vector P se suma consigo mismo ($P+P$), se tendrá un vector $2P$, lo que se corresponde con el concepto de multiplicación de un número. Además, que si a un número X se lo multiplica por su negativo ($-X$), se obtiene $X(-X)$, con $-X$ como resultado. Este comportamiento es muy similar cuando se trata de multiplicar un número escalar por un vector.

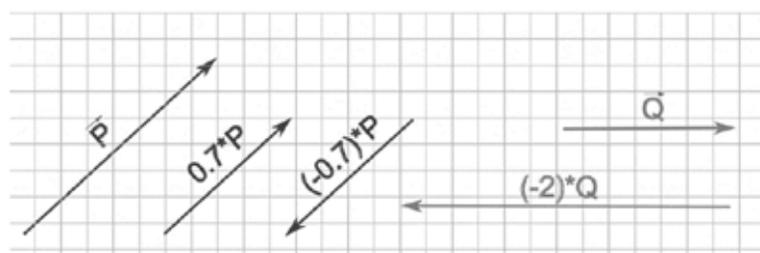
Dado que existen escalares y vectores negativos, se generalizará un factor k cuyo producto modificará las características del vector P , tal que:

- ▶ Si k es positivo, el producto kP tendrá la misma dirección y sentido que el vector P .
- ▶ Si k es negativo, el vector kP tendrá dirección y sentido contrario al vector P .



La figura 8.11 presenta ejemplos de vectores P y Q cuyo producto se realiza para distintos valores de k positivos y negativos. La dirección de los vectores se conserva. El signo de k define el sentido y su valor define la dimensión o magnitud del vector. Si k es mayor que uno, el vector incrementará su tamaño, mientras que si el valor de k es menor que uno, se reducirá.

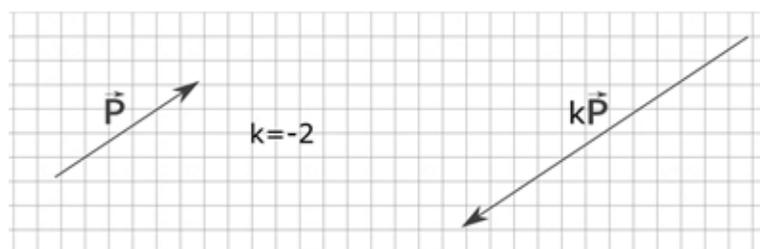
Figura 8.11. Producto escalar por un vector



Ejemplo:

Dado el vector $P^{\rightarrow} = 6i^{\rightarrow} + 4j^{\rightarrow}$ y un factor $k = -2$, determine el producto kP^{\rightarrow} y grafica los vectores respectivos.

Figura 8.12. Ejemplo de producto escalar por un vector



En la figura 8.12, se representó gráficamente el vector P con los valores planteados, considerando la cuadrícula, cuya separación corresponde a una unidad.

Producto punto (escalar) de dos vectores

Esta operación vectorial se aplica en múltiples soluciones del ámbito de la física y mecánica. Así, por ejemplo, el trabajo se obtiene en algunos casos como el producto punto entre los vectores fuerza y desplazamiento, cuyo resultado corresponde a una magnitud escalar. Por tal motivo, esta operación también es denominada producto escalar.

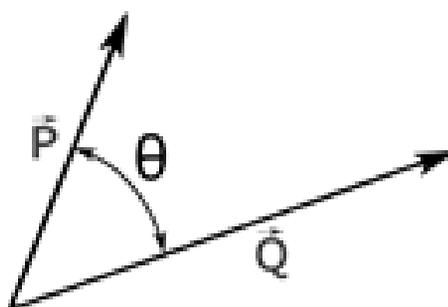


Dados los vectores P y Q, el producto escalar $P \cdot Q$ se obtiene mediante:

$$P \cdot Q = |P||Q|\cos\theta \quad (8.1)$$

En donde θ es el ángulo formado por los dos vectores considerando un mismo origen (figura 8.13).

Figura 8.13. Ángulo formado por dos vectores



Dado que la solución implica módulos que eliminan el signo de las magnitudes de los vectores, el resultado positivo o negativo depende directamente del ángulo que se forma, tal que:

- ▶ Si θ es igual a 90° , el producto $P \cdot Q = 0$
- ▶ Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$, el producto $P \cdot Q > 0$
- ▶ Si $90^\circ < \theta < 180^\circ$, el producto $P \cdot Q < 0$

Si son conocidas las componentes de los vectores:

$$P = P_x i + P_y j + P_z k$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$



El producto punto se obtiene mediante:

$$P \vec{\cdot} Q \vec{=} P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{8.2}$$

A menudo es de interés determinar el ángulo que forman los dos vectores, para lo cual puede emplearse la siguiente expresión, de la que bastará despejar el valor del ángulo θ .

$$\cos \theta = \frac{P_x \cdot Q_x + P_y \cdot Q_y + P_z \cdot Q_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \cdot \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}} \tag{8.3}$$

En la tabla 8.2, se presentan las propiedades del producto punto de vectores.

Tabla 8.2. Propiedades del producto punto de dos vectores

1	$P \vec{\cdot} Q \vec{=} Q \vec{\cdot} P \vec{}$	Ley conmutativa
2	$k(Q \vec{+} R \vec{)} = (kQ \vec{)} \cdot C \vec{}$	Ley asociativa
3	$P \vec{\cdot}(Q \vec{+} R \vec{)} = P \vec{\cdot} Q \vec{+} P \vec{\cdot} R \vec{}$	Ley distributiva
4	$P \vec{\neq} 0 \Rightarrow P \vec{\cdot} P \vec{>} 0$	El producto de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo



Ejemplo 35:

Dados los vectores $P^{\rightarrow} = 12i^{\rightarrow} + 3j^{\rightarrow} + 0k^{\rightarrow}$ y $Q^{\rightarrow} = 3i^{\rightarrow} - 2j^{\rightarrow} + 8k^{\rightarrow}$, determine, el producto punto $P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow}$ y el ángulo que estos dos vectores forman.

$$P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow} = 12 \cdot 3 + 3(-2) + 0(8)$$

$$P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow} = 30$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{12 \cdot 3 + 3(-2) + 0(8)}{\sqrt{12^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2}} \right)$$

$$\theta = 88,71^{\circ}$$

Producto vectorial de dos vectores

Dados los vectores P y Q, el producto vectorial se representa como $P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow}$.

Esta operación arroja como resultado otro vector. Las características de este se obtienen de la siguiente manera:

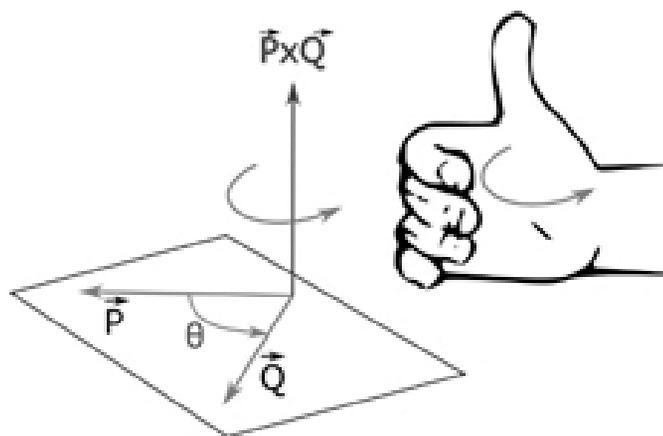
El módulo del vector será una cantidad siempre positiva y evaluada con la expresión:

$$|P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow}| = PQ \text{sen}\theta \quad (8.4)$$

- ▶ La dirección será perpendicular al plano formado por los vectores P y Q (figura 8.14).
- ▶ El sentido lo indicará la regla de la mano derecha (regla del sacacorchos). El sentido de giro de la mano derecha es el giro que realizarán los dedos para cerrar la mano; el dedo pulgar indicará el sentido que tendrá el vector obtenido en el producto $P^{\rightarrow} \cdot Q^{\rightarrow}$.



Figura 8.14. Regla de la mano derecha



Existirá un producto cruz igual a cero cuando $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$.

Las propiedades base para esta operación entre vectores se detallan en la tabla 8.3.

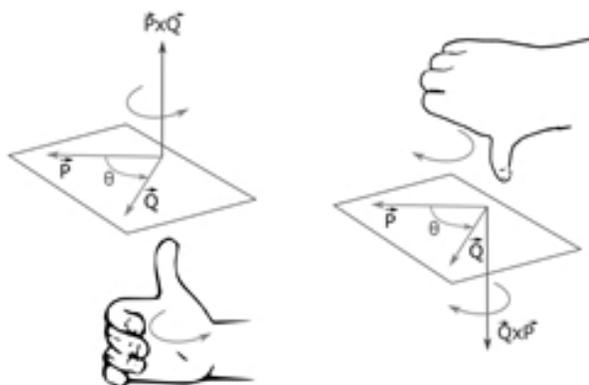
Tabla 8.3. Propiedades del producto cruz de dos vectores

1	$P \vec{x} Q \vec{=} -Q \vec{x} P \vec{}$	Ley anticonmutativa (figura 8.15)
2	$k(Q \vec{x} R \vec{)} = (kQ \vec{)} \cdot R \vec{}$	Ley conmutativa escalar
3	$P \vec{}(Q \vec{+} R \vec{)} = P \vec{x} Q \vec{+} P \vec{x} R \vec{}$	Ley distributiva
4	$P \vec{x} P \vec{=} P$	Producto por sí mismo

Es importante tener presente la propiedad anticonmutativa de esta operación a fin de no caer en este error común. La figura 8.15 presenta de forma gráfica la implicación de esta primera ley para los vectores P y Q.



Figura 8.15. Posibilidades de la regla de la mano derecha



Existe una expresión para determinar el producto cruz en función de las componentes sin tener que trabajar con el ángulo entre los vectores. Sean los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} \\ \vec{Q} &= Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k} \end{aligned}$$

El producto cruz se obtiene mediante:

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_y & P_z \\ Q_y & Q_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} P_x & P_z \\ Q_x & Q_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{vmatrix} \vec{k} \quad (8.5)$$

Ejemplo 36:

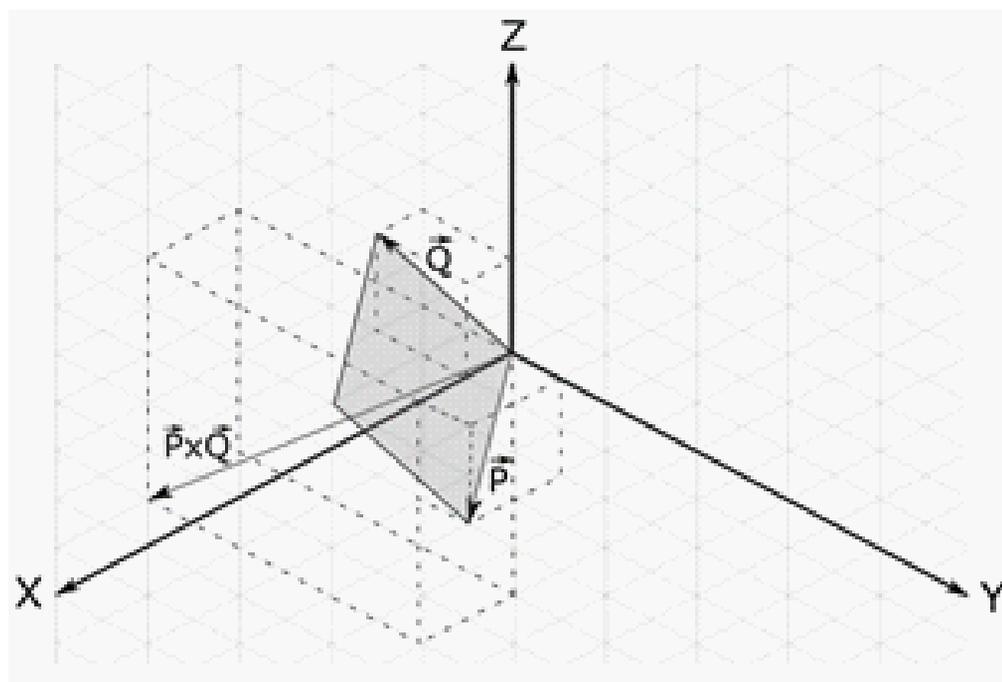
Dados los vectores $\vec{P} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{Q} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, determina el producto cruz $\vec{P} \times \vec{Q}$ y grafique todos los vectores mencionados.

$$\begin{aligned} \vec{P} \times \vec{Q} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ \vec{P} \times \vec{Q} &= (2 - 4) \vec{i} - (4 + 2) \vec{j} + (-4 - 1) \vec{k} \\ \vec{P} \times \vec{Q} &= -2\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned}$$



En la figura 8.16, se expresa gráficamente:

Figura 8.16. Producto cruz de vectores





Ejercicios propuestos de vectores

1. Sabiendo el punto $A(-2,-3)$ y el vector $AB(8,6)$, determina las coordenadas del punto B y gráficelos.
2. El vector AB viene determinado por las componentes $(-12,10)$. Sabemos que el punto extremo es $B(-6,4)$. Determina el punto origen A y grafica.
3. Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $V(k,3)$ es 5.
4. Dados los vectores $u = 2i - 2j + 4k$, $v = 2i - 9j + k$ y $z = 2i + 2j - k$, determina el vector unitario en la dirección y el sentido del vector $s = u + v - z$.
5. Suma los vectores $A(5, 1)$, $B(-4,0)$ por los métodos:
 - a. Algebraico
 - b. Del paralelogramo
 - c. Del polígono
6. Dados los vectores $u(1, 3, 3)$ y $v(-1, -1, 3)$ calcular:
 - a. Su producto vectorial.
 - b. El ángulo que forman los vectores
7. Dos vectores cuyos extremos son los puntos $A(-3,2,0)$ y $B(5,-3,-1)$ tienen como origen común el punto $C(-1,3,1)$. Calcula el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.
8. Dados los vectores $A(3, -2, 0)$ y $B(1, 2, 1)$, calcula los vectores de módulo 3 y perpendiculares a ambos vectores.
9. Dados los vectores $O(4, -3, 0)$ y $P(8, 6, 0)$, calcula:
 - a. $2A + B$
 - b. Un vector de modulo 1 en la dirección de O
 - c. El producto escalar $O \cdot P$

Nombre:

.....

Calificación:



Fundamentos de Mecánica para Ingeniería

Teoría y Práctica

- d. El ángulo que forman O y P
 - e. El producto vectorial de $O \cdot P$
 - f. El módulo del producto vectorial $O \cdot P$
10. Dados los vectores $A = 2i + 2j - k$ y $C = 4i - 2j + 2k$, calcula el ángulo que forman los dos vectores.

Nombre:

.....

Calificación:





Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos todo sobre los vectores y las fuerzas aplicadas
- ▶ Resolveremos ejercicios de fuerzas y vectores



Capítulo 9

Resultantes de varias fuerzas concurrentes

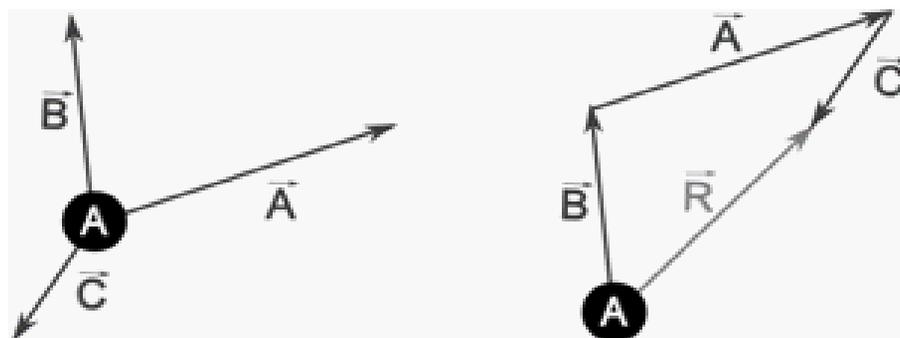
Lo más común en la naturaleza es hallar cuerpos en interacción y, por tanto, ejerciendo fuerzas unos hacia otros. Estas poseen diversos orígenes que se revisarán en temas posteriores. En este capítulo se estudia el efecto de múltiples fuerzas sobre una partícula, la misma que facilita su análisis y es suficientemente adecuada para muchos casos prácticos.

Dado el caso que una partícula A reciba múltiples fuerzas externas, se denominarán fuerzas concurrentes por el hecho de que tienen dirección hacia la partícula A, sea cualquiera su sentido.

En la figura 9.1, las fuerzas se representan mediante vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

La figura sugiere un sistema similar a una esfera sujeta por tres cuerdas desde las cuales se tira pretendiendo alargar la partícula A.

Figura 9.1. Fuerzas concurrentes sobre la partícula A





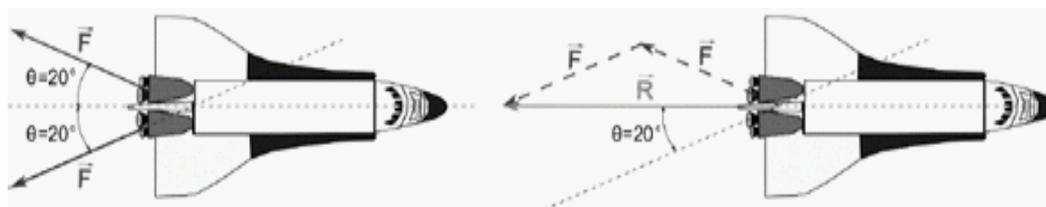
Empleando el método del polígono, el vector R será el resultado de la suma de los vectores A , B y C , de forma que R representará el mismo efecto que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Cabe recordar que el orden en el que se coloquen los vectores es irrelevante, ya que de todas formas se hallará el mismo vector R .

Descomposición de una fuerza en sus componentes

Tal y como se abordó en las operaciones con vectores, se requiere un sistema de referencia, un origen y unidades para tener una idea completa de lo que el vector representa. Con estas premisas, el problema más común es hallar el efecto que producen muchas fuerzas en una partícula. Para ello, se hace necesario descomponer los vectores en componentes respecto de sistemas de referencia convenientes y de utilidad para el análisis e interpretación. También se suele reemplazar el efecto deseado de una fuerza por dos o más fuerzas que realicen un efecto similar.

Un ejemplo para obtener la fuerza resultante se presenta en la figura 9.2, en la que hay dos fuerzas provenientes de los propulsores. Se hace necesario determinar la reacción total $R \vec{}$.

Figura 9.2. Descomposición de una fuerza



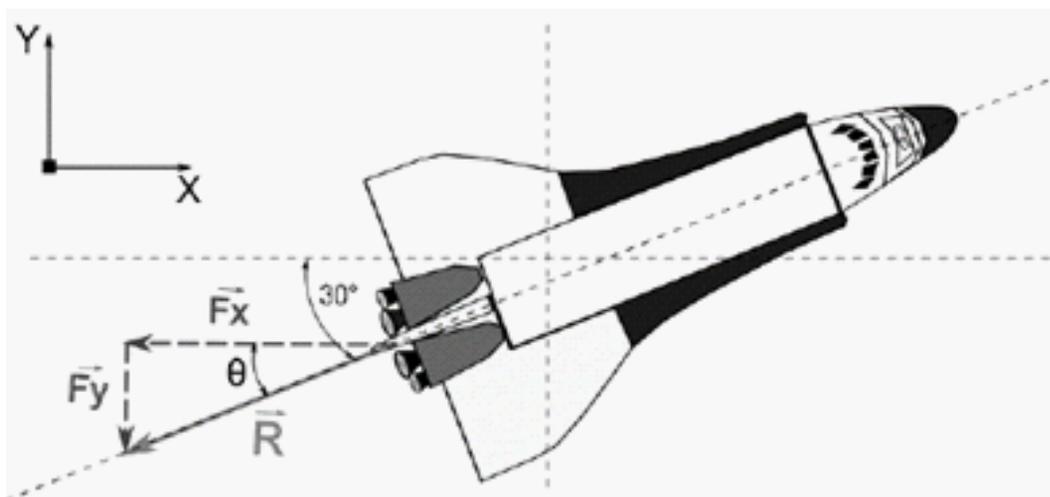
Respecto del ejemplo presentado, es indispensable recordar que las dos fuerzas F de igual magnitud son generadas por propulsores que tienen una inclinación de 20° tanto hacia arriba como hacia abajo del eje longitudinal. La reacción R deberá coincidir con este eje.

Si se aplica el método del triángulo o analítico, es sencillo obtener el valor de la reacción a partir de las fuerzas de propulsión.

Otra alternativa es encontrar las proyecciones de una fuerza sobre un eje X y Y de referencia, tal que aquellas componentes sumen vectorialmente al vector original R .



Figura 9.3. Componentes de la fuerza en ejes X y Y



Las componentes se obtienen mediante las funciones trigonométricas básicas, dado el carácter ortogonal de los ejes de referencia. Las proyecciones formarán ángulos rectángulos y el cálculo se volverá intuitivo.

Las componentes que se deben determinar son F_x (componente horizontal) y F_y (componente vertical). Las direcciones de X y Y corresponden a los ejes graficados como referencia en la parte superior izquierda de la figura 9.3.

Se observa clara e intuitivamente que el ángulo θ tiene un valor de 30° , ya que son ángulos correspondientes.

- Las componentes se determinarán de la siguiente manera:

La fuerza F_x , como cateto adyacente del triángulo rectángulo, tendrá un valor:

$$F_x = R \cdot \cos\theta \quad (9.1)$$

Y, para este caso, un valor negativo por tener sentido contrario al eje X.

- La fuerza F_y , en calidad de cateto opuesto del triángulo, tendrá un valor:

$$F_y = R \cdot \sin\theta \quad (9.2)$$

Y, para este caso, un valor negativo, por tener sentido contrario al eje Y.



- Cabe recordar que, si se poseen las magnitudes de los vectores F_x y F_y , el ángulo θ puede obtenerse a partir de:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \quad (9.3)$$

Figura 9.4. Ejemplo de descomposición de fuerzas

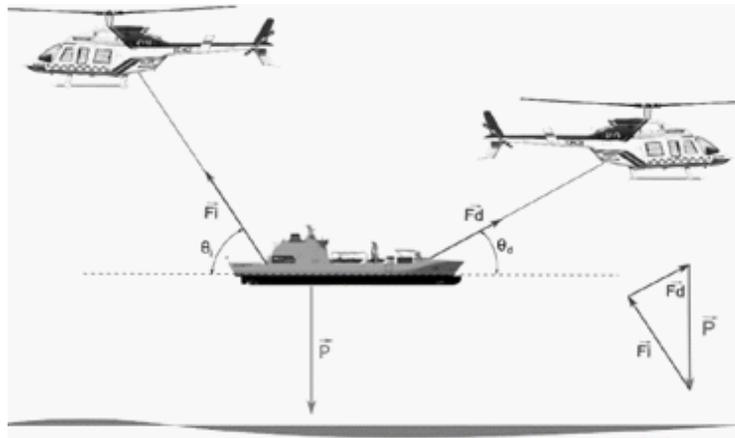
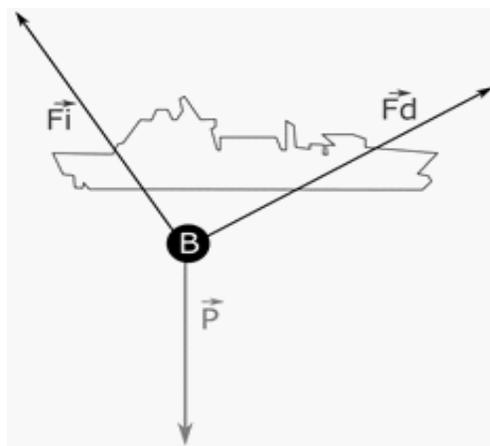


Figura 9.5. Ejemplo de punto de concurrencia de las fuerzas



Otro caso habitual en la física básica puede ser un sistema formado por dos helicópteros que elevan una embarcación, como se ilustra en la figura 9.4. El helicóptero de la derecha aplica una fuerza $(F_d)\vec{}$, mientras que el otro, una fuerza $(F_i)\vec{}$. Cada uno ejecuta una fuerza con diferente ángulo respecto de la horizontal.



La fuerza F_i se aplica con ángulo θ_{-1} . Una tercera fuerza en este sistema corresponde al peso del barco, siempre vertical y en sentido al centro de la Tierra.

La figura 9.5 muestra un sistema equivalente en el que se ha encontrado el punto de concurrencia de las fuerzas aplicadas en el sistema, con un punto de confluencia fuera de los límites de la embarcación. Con esta consideración, se pueden ajustar los vectores mencionados al método del triángulo. En este caso, no es un triángulo rectángulo, por lo que las leyes trigonométricas no serán de mucha ayuda.

Para la solución de estos triángulos, será pertinente mencionar dos leyes geométricas y de gran utilidad: la ley de senos y la ley de cosenos.

Para definir las de forma adecuada, se denominará a los catetos del triángulo como a , b y c , mientras que a sus correspondientes ángulos se los nominará con su letra mayúscula A , B y C . Es de utilidad recordar que la suma de los ángulos internos del triángulo es 180° .

Ley de senos

Considera, para un triángulo en el plano, una relación proporcional entre sus lados y el seno de sus ángulos respectivos mediante la siguiente expresión:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad (9.4)$$

Ley de cosenos

El cuadrado de la longitud de un lado es la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de dichas longitudes y multiplicado por el coseno del ángulo opuesto al lado en cuestión.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad (9.5)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \quad (9.6)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \quad (9.7)$$



Ejemplo 37:

Realizando la analogía con la nomenclatura de la figura 9.6, el problema proporciona datos de los lados a y c , y el ángulo C (obtenido como complementario). Deberán determinarse el lado b y el ángulo A para posteriormente hallar θ_d .

Basándose en la figura 9.7, y conociendo que el helicóptero de la derecha aplica una fuerza $F_d=180$ kN mientras que el otro, una fuerza F_i con $\theta_i=50^\circ$, determina el valor de la fuerza izquierda F_i y el ángulo θ_d , si se conoce que el barco pesa 20 toneladas.

Aplicando ley de senos se puede determinar el ángulo A .

$$\frac{200 \text{ kN}}{\text{sen}A} = \frac{180 \text{ kN}}{\text{sen}(40^\circ)}$$

Figura 9.6. Ejemplo de ley de senos

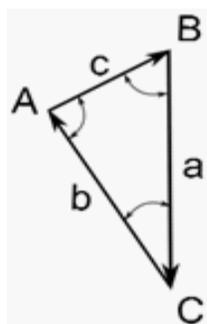
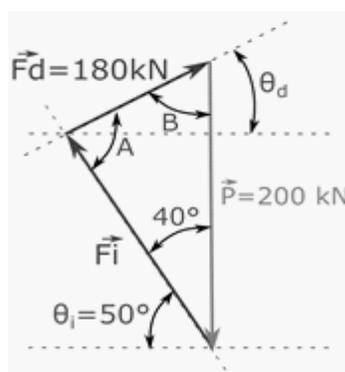


Figura 9.7. Parámetros de la ley de senos





$$A = \text{sen}^{-1} \left(\frac{200 \text{ kN} \cdot \text{sen}(40^\circ)}{180 \text{ kN}} \right)$$

$$A = 45,57^\circ$$

Nótese que el ángulo θ_d es parte del ángulo A, de tal forma que, analizando el triángulo rectángulo inferior, se tiene:

$$A - \theta_d + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\theta_d = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 45,57^\circ$$

$$\theta_d = 4,43^\circ$$

Aplicando la misma ley de senos también se puede hallar el valor de Fi. Sin embargo, se aplicará la ley de cosenos para darle utilidad e ilustrar su aplicación. Para completar la formulación se deberá tener el valor del ángulo B el cual será:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B = 180^\circ - A - C$$

$$B = 180^\circ - 45,57 - 40$$

$$B = 94,43^\circ$$

Con lo que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

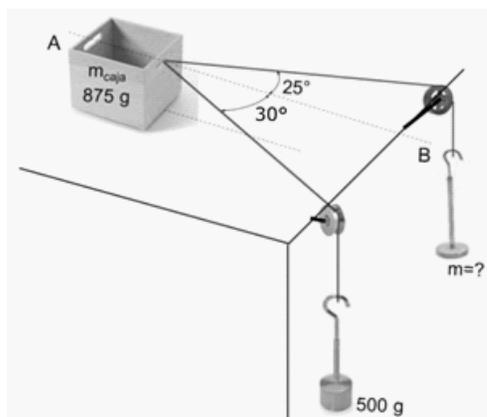
$$Fi^2 = 200^2 + 180^2 - 2(200)(180) \cdot \cos(94,43^\circ)$$

$$Fi = 258,5 \text{ kN}$$

Existen sistemas que incorporan más elementos, algunos que cambian el sentido de movimiento, incrementan o disminuyen. En el ejemplo que se presenta a continuación, se emplean poleas que permiten direccionar cuerdas, las cuales soportarán cargas cuyo efecto se trasladará a una caja que se desliza sobre una mesa (figura 9.8).

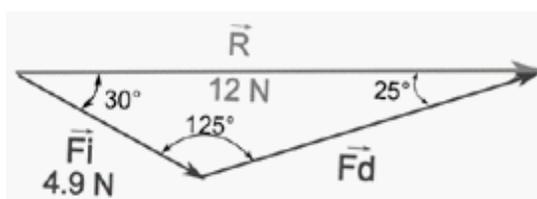


Figura 9.8. Ejemplo de aplicación para ley de senos



La caja de la figura debe ser desplazada en la dirección A-B con una fuerza total $R=12\text{ N}$. Si el sistema se equilibra con los portamasas vacíos y se coloca a la izquierda una masa de 500 g, ¿cual deberá ser la masa m para que se logre mover la caja de A hacia B?

Figura 9.9. Solución con ley de senos



Se pueden observar las fuerzas que actúan en el sistema. Hay dos ángulos y dos magnitudes de fuerza. Dado que no existen ángulos de 90° en el interior del triángulo, se usará la ley de senos para determinar la magnitud de la fuerza derecha F_d .

$$\frac{12\text{ N}}{\text{sen}(125^\circ)} = \frac{F_d}{\text{sen}(30^\circ)}$$

$$F_d = 7,32\text{ N}$$

La masa izquierda requerida para generar la fuerza F_d será:

$$m = \frac{F_d}{g} = \frac{7,32}{9,81} = 0,746\text{ kg o } 746\text{ gr}$$

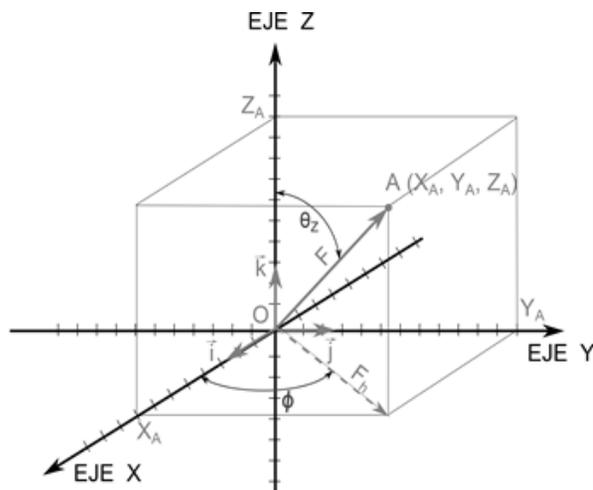


Fuerzas en el espacio

En temas tratados con anterioridad, se ha preferido el uso de vectores en el plano a fin de mejorar la didáctica e intuición en la aplicación de conceptos y criterios abordados. Sin embargo, el mundo de más de dos dimensiones en el que habitamos nos exige un mayor esfuerzo en la aplicación y uso de vectores.

El espacio al que hacen referencia los vectores fuerza corresponde al sistema de coordenadas cartesianas espaciales o espacio euclídeo de tres dimensiones. La figura 9.10 presenta algunos elementos típicos del espacio tridimensional.

Figura 9.10. Ejemplo de fuerza en el espacio



- ▶ La posición A identificada en el espacio, definida por sus componentes X_A , Y_A , Z_A .
- ▶ Un vector desde el punto O hasta A que determina la posición del punto A respecto del punto O.
- ▶ Vectores unitarios $i^{\rightarrow}, j^{\rightarrow}, k^{\rightarrow}$ que indican las direcciones en sentido positivo sobre los ejes X, Y, Z, respectivamente.
- ▶ Sistema de referencia euclídeo que delimita el espacio, y permite ubicar un punto en cuadrantes ortogonales mediante coordenadas en cada eje.



A menudo es de interés determinar las componentes de un vector en los ejes X, Y y Z. Existen algunas relaciones de utilidad.

$$F_z = F \cdot \cos\theta_z \quad (9.8)$$

$$F_x = F_h \cdot \cos\phi = F \cdot \sin\theta_z \cdot \cos\phi \quad (9.9)$$

$$F_y = F_h \cdot \sin\phi = F \cdot \sin\theta_z \cdot \sin\phi \quad (9.10)$$

Siendo la fuerza horizontal $F_h = F \cdot \sin\theta_z$

$$F^2 = F_z^2 + F_h^2 \quad (9.11)$$

$$F = \sqrt{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)} \quad (9.12)$$

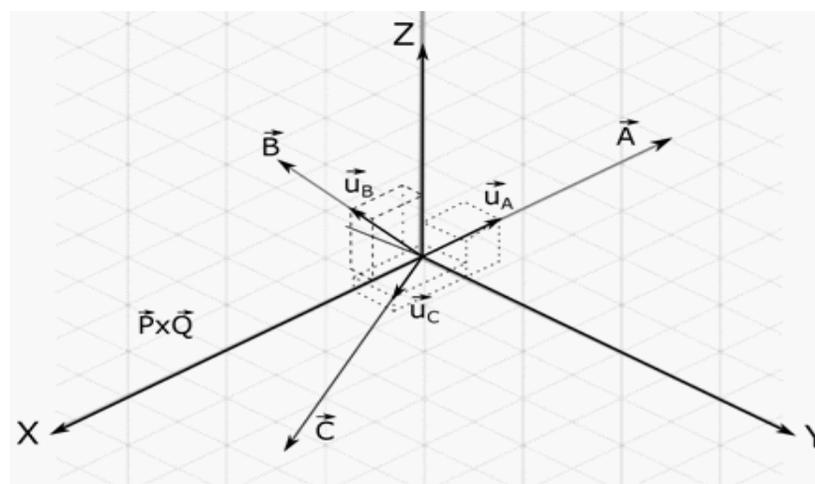
$$F_h^2 = F_x^2 + F_y^2 \quad (9.13)$$

Vectores unitarios

Un vector puede representarse mediante el producto de una magnitud y un vector unitario. Este último, con información de la dirección y sentido, tal que:

$$\vec{A} = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k} = |\vec{P}| \cdot \vec{u}_A \quad (9.14)$$

Figura 9.11. Representación de vectores unitarios





Los tres vectores A, B y C se alinean con sus respectivos unitarios u_A^{\rightarrow} , u_B^{\rightarrow} , u_C^{\rightarrow} (figura 9.11).

Con respecto al tamaño de los vectores unitarios, estos siempre tendrán una magnitud de 1, y sus componentes podrán variar entre cero y la unidad.

$$A^{\rightarrow} = -i^{\rightarrow} + 4j^{\rightarrow} + 4k^{\rightarrow} \quad |A^{\rightarrow}| = 5,74$$

$$B^{\rightarrow} = 2i^{\rightarrow} - j^{\rightarrow} + 2.5k^{\rightarrow} \quad |B^{\rightarrow}| = 3,35$$

$$C^{\rightarrow} = 7i^{\rightarrow} + 4j^{\rightarrow} + 1.5k^{\rightarrow} \quad |C^{\rightarrow}| = 8,20$$

Por su parte, la obtención del unitario se realiza empleando la relación:

$$u_A^{\rightarrow} = \frac{A}{|A^{\rightarrow}|} = \frac{-i^{\rightarrow} + 4j^{\rightarrow} + 4k^{\rightarrow}}{5,74} = 0,17i^{\rightarrow} + 0,7j^{\rightarrow} + 0,7k^{\rightarrow}$$

$$u_B^{\rightarrow} = \frac{B}{|B^{\rightarrow}|} = \frac{2i^{\rightarrow} - j^{\rightarrow} + 2.5k^{\rightarrow}}{3,35} = 0,6i^{\rightarrow} + 0,3j^{\rightarrow} + 0,75k^{\rightarrow}$$

$$u_C^{\rightarrow} = \frac{C}{|C^{\rightarrow}|} = \frac{7i^{\rightarrow} + 4j^{\rightarrow} + 1.5k^{\rightarrow}}{8,20} = 0,85i^{\rightarrow} + 0,49j^{\rightarrow} + 0,18k^{\rightarrow}$$

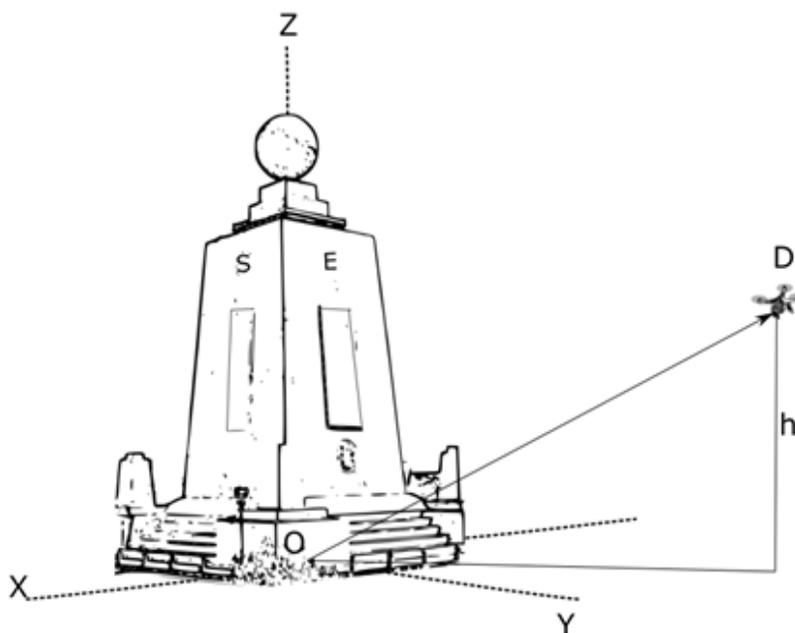
Puede comprobarse que todos los unitarios poseerán un valor de 1 para su magnitud.

Ejemplo 38:

Un dron se ubica en el punto D a la mitad de la altura del monumento de la Mitad del Mundo (30 m). Se conoce que la posición del robot con respecto a la base del monumento es 6 metros hacia el norte y 8 metros hacia el este (figura 9.12). Determina el vector posición del dron respecto del sistema de referencia y encuentra su vector unitario.



Figura 9.12. Ejemplo de fuerzas en el espacio



Con un poco de observación en los datos y cuadrando la orientación cardinal con los ejes cartesianos se puede determinar el vector posición desde O hasta D:

$$\overrightarrow{OD} = -6 \vec{i} + 8 \vec{j} + 15 \vec{k}$$

Se obtiene su magnitud y vector unitario.

$$\vec{u}_{OD} = \frac{\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OD}|} = \frac{6 \vec{i} + 8 \vec{j} + 15 \vec{k}}{\sqrt{(-6)^2 + (8)^2 + (15)^2}} = 0,33 \vec{i} + 0,44 \vec{j} + 0,83 \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{OD}| = 18,02$$

Con lo que el vector será:

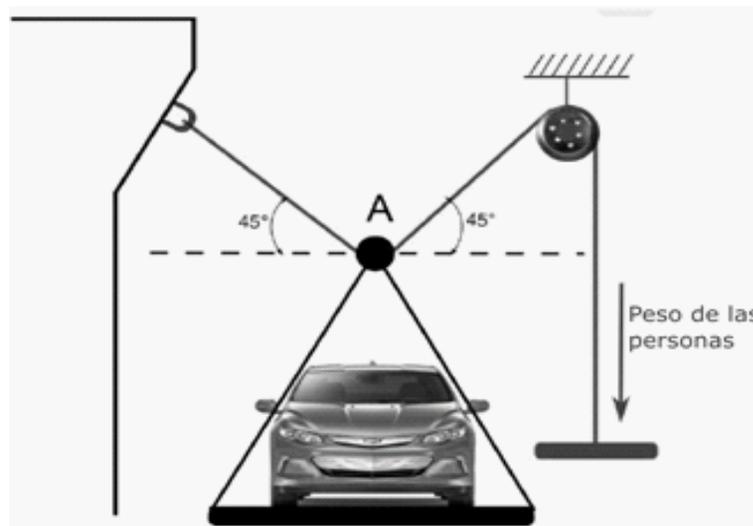
$$\overrightarrow{OD} = 18,02 (0,33 \vec{i} + 0,44 \vec{j} + 0,83 \vec{k})$$



Ejercicios propuestos

1. Resuelve el ejercicio del ejemplo 38 de forma analítica y verifica si se obtiene el mismo resultado.
2. Resuelve el ejercicio anterior de forma gráfica en una plantilla cuadrada y verifica su solución.
3. Determina el número de personas de 60 kg que deberán posarse sobre la plataforma a fin de mantener al vehículo colgando, si se conoce que este tiene una masa de 2400 kg (figura 9.13).

Figura 9.13. Figura del ejercicio 3



4. Un robot aerodeslizador se mueve 200 pies horizontalmente y después viaja 135 pies en un ángulo de 30° sobre la horizontal. Luego recorre 135 pies en un ángulo de 40° bajo la horizontal. ¿Cuál es el desplazamiento desde su punto de partida inicial?
5. Un dron terrestre utilizado para operaciones militares inicia un viaje de reconocimiento, desplazándose primero 25 km hacia el sureste desde su punto de partida. Se detiene para pasar la noche y enviar información al campamento base. En el segundo día, se desplaza 40 km en una dirección de 60° al norte del este, punto en el cual descubre la torre de insurgentes.
 - a. Determina las componentes del desplazamiento diario del dron terrestre.

Nombre:

.....

Calificación:



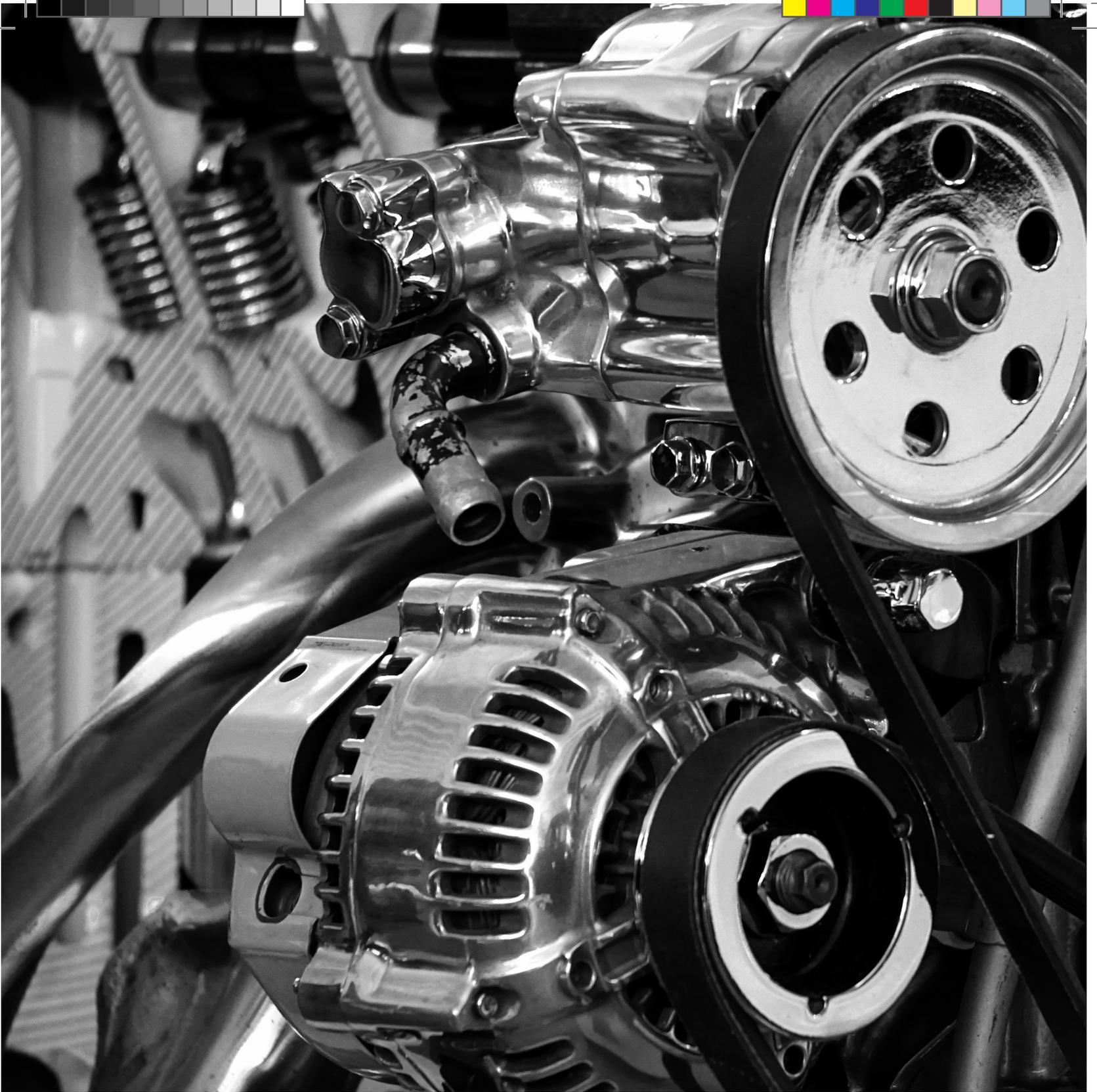
6. Después de realizar un experimento en el gran colisionador de hadrones, se determina que una partícula extraña al bosón de Higgs efectúa dos desplazamientos. El primero posee una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120° con el eje de las abscisas positivo. El desplazamiento resultante posee una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35° respecto al eje de las abscisas positivo. Encuentra la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.
7. Se encontró una bitácora de un espía ruso de la Segunda Guerra Mundial en la cual se detalla que un cohete V12 de prueba pasó sobre Gran Bretaña viajando en una dirección de 60° al norte del oeste con una rapidez de 41 km/h. Media hora después, aparentemente por una falla de su giroscopio, se desvió repentinamente hacia el norte y su rapidez se redujo a 25 km/h. ¿A qué distancia se encontraba el cohete 45 minutos después de que pasó por Gran Bretaña?
8. Desde un vehículo aéreo no tripulado, se observa a dos personas que jalan un vehículo. Encuentra:
 - a. La única fuerza que es equivalente a las dos fuerzas indicadas.
 - b. La fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre el vehículo para hacer la fuerza resultante igual a cero.

Nombre:

.....

Calificación:

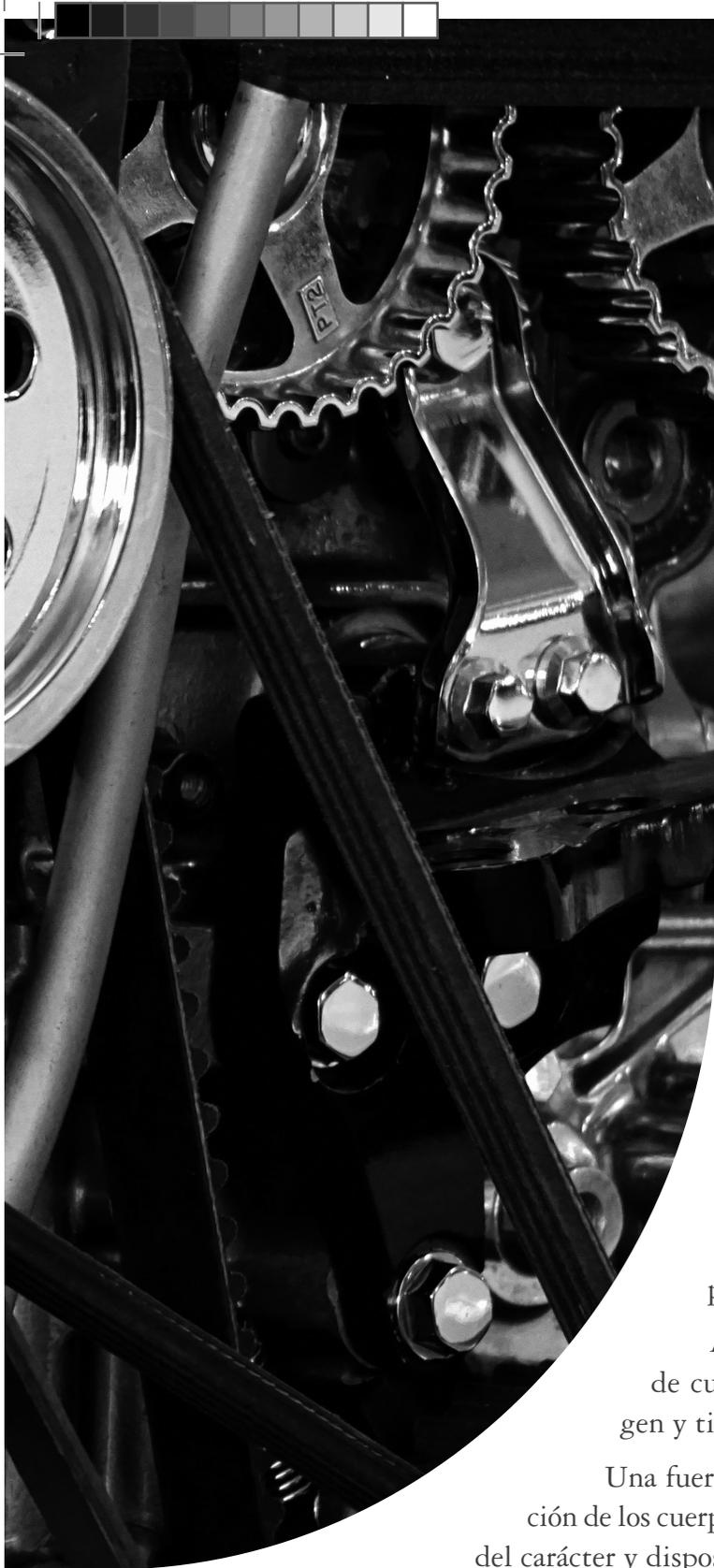




10

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Aprenderemos sobre los diagramas de cuerpo libre
- ▶ Resolveremos distintos tipos de ejercicios



Capítulo 10

Diagramas de cuerpo libre

Un diagrama de cuerpo libre o DCL es una representación gráfica que muestra un cuerpo aislado de su entorno y, mediante vectores, las fuerzas que este recibe. La representación indicará claramente la dirección y sentido de cada fuerza, identificando su origen. Para esto es prudente conocer el origen de cada una de estas fuerzas y ser conscientes de que un cuerpo no puede realizar fuerza sobre sí mismo.

Antes del desarrollo de los diagramas de cuerpo libre, es necesario indagar en el origen y tipos de fuerzas que existen.

Una fuerza se origina como resultado de la interacción de los cuerpos, acercándolos o alejándolos dependiendo del carácter y disposición de sus estructuras.

Las fuerzas debidas a la interacción estudiadas hasta la actualidad se clasifican en dos categorías importantes:

Fuerzas mediante contacto.- Estas se generan debido al contacto físico de los cuerpos. Algunos ejemplos de estas fuerzas son: tensión, fricción, normal, resistencia del aire, etc.

Fuerzas de acción a distancia.- Se generan a pesar de que no exista contacto físico entre los cuerpos. Algunos ejemplos de fuerzas de este tipo son: atracción



gravitacional, efectos magnéticos, fuerzas eléctricas. Las fuerzas magnéticas y eléctricas no se considerarán en estos primeros capítulos.

Tabla 10.1. Tipos de fuerza en función de su interacción

Fuerzas de contacto	Fuerzas de acción a distancia
Fuerza de fricción	Fuerza gravitacional
Fuerza de tensión	Fuerza eléctrica
Fuerza normal	Fuerza magnética
Resistencia del aire	-
Fuerza aplicada	-
Fuerza elástica	-

Fuerza aplicada.- Es una fuerza dada sobre un objeto o fluido debido a la presencia de otro objeto o por efecto de una persona. Por ejemplo, si una persona empuja una silla, estará aplicando una fuerza. La dirección y sentido dependen de la configuración del objeto que aplica la fuerza y la geometría de los objetos que interactúan.

Fuerza normal.- Se ejerce por el contacto de un cuerpo sobre otro. Por ejemplo, la llanta de un automóvil se posa sobre la carretera, entonces la carretera realizará una fuerza normal para lograr que la llanta permanezca a nivel del suelo. Si un niño está apoyado sobre una mesa, entonces esta hará una fuerza normal sobre el niño para que este no descienda al piso.

Atracción de la fuerza de gravedad (peso).- La fuerza generada por el efecto de la Tierra para atraer a un objeto es función del valor de la aceleración ($9,81 \text{ m/s}^2$) o gravedad y la cantidad de masa que posee un objeto.

$$F_{\text{grav}} = m \cdot g \quad (10.1)$$

El sistema internacional (SI) propone el uso del newton (N) como unidad de fuerza derivada del producto de la aceleración en m/s^2 y la masa del objeto en kg.



Fuerza de rozamiento.- Debido al contacto de dos cuerpos y cuando el uno se mueve relativamente respecto del otro, se genera una fuerza que habitualmente se opone al movimiento por la presión que se realiza entre esos cuerpos y dependiendo de la naturaleza de las dos superficies. Esta fuerza posee dos posibilidades: fricción estática y fricción deslizante o dinámica. Se puede determinar mediante la siguiente ecuación.

$$F_{fr} = \mu \cdot F_N \quad (10.2)$$

Fuerza de tensión.- Se transmite mediante elementos de relativa gran flexibilidad, como cuerdas, cables, alambres, fibras e hilos. Cuando está presente, alarga al elemento flexible con una fuerza constante a lo largo de su estructura. Normalmente los cables sujetan cargas cuyo peso es elevado.

Fuerza elástica.- Se genera al deformar elementos que tienden a conservar sus dimensiones originales, como los resortes. Es común el empleo de resortes que cumplen la ley de Hooke, la que considera que la fuerza que generan es directamente proporcional a la magnitud del alargamiento o acortamiento. Esta fuerza se determina mediante:

$$F_e = -k \cdot x \quad (10.3)$$

Fuerza de resistencia del aire.- Cuando un cuerpo se mueve a través del aire, este posee una resistencia similar a la fricción que dificulta el movimiento del cuerpo. Esta fuerza, cuando el movimiento es lento, posee un efecto insignificante. Por ello, es habitual considerarla para efectos dinámicos en vehículos y edificaciones, en donde toma valores considerables. En aplicaciones de la vida real, dada la aleatoriedad de los flujos de aire, estos efectos se compensan mediante técnicas de control en el caso de vehículos aéreos.

La tabla 10.2 presenta un cuadro comparativo de las fuerzas más empleadas en la mecánica clásica. En el gráfico se coloca dirección y sentido de cada fuerza, así como algunas de sus consideraciones.

Además del origen de las fuerzas abordadas, debe tenerse en cuenta, en el diagrama de cuerpo libre, el tipo de apoyo que poseen los elementos que forman el sistema, ya que, dependiendo de su tipo, poseerá una o más componentes y también se definirá su dirección según el caso.



La tabla 10.2 describe de forma gráfica las situaciones de apoyo, así como las reacciones que estas generan. Cabe destacar que para el caso del apoyo fijo aparece un momento M debido a la fuerza y la distancia al punto de empotramiento del elemento.

Tabla 10.2. Tipos de apoyos y sus reacciones

	Tipo de apoyo	Reacción
Cable		
Rodillo		
Apoyo liso		
Pasador externo		
Pasador interno		
Soporte fijo		

Una vez conocidos algunos parámetros de las fuerzas, se analizará la ejecución de diagramas de cuerpo libre, para lo que es indispensable tomar en cuenta ciertas recomendaciones:

- ▶ Identificar todas las fuerzas que participan en el sistema y de qué manera afectan sobre el cuerpo de interés o análisis.
- ▶ Cada cuerpo tiene su propio diagrama de cuerpo libre. Se debe recordar que, para cada acción, existe una reacción y, de esta manera, se relacionan e interactúan los cuerpos.

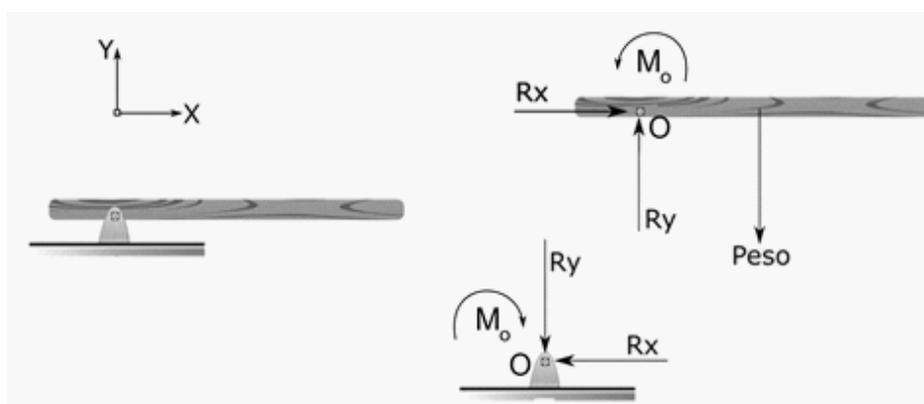


- ▶ Las fuerzas deberán colocarse como vectores y en función de un sistema de referencia único y conveniente para el análisis.

Ejemplo 39:

A la izquierda de la figura 10.1, se presenta un sistema de tablero para lanzamiento en una piscina. La tabla se encuentra fija en la base, que a su vez se fija en el suelo.

Figura 10.1. Ejemplo de reacciones en empotramiento



A la derecha, se observan el apoyo y la tabla por separado. Son dos objetos y cada uno posee fuerzas que se transmiten del uno al otro.

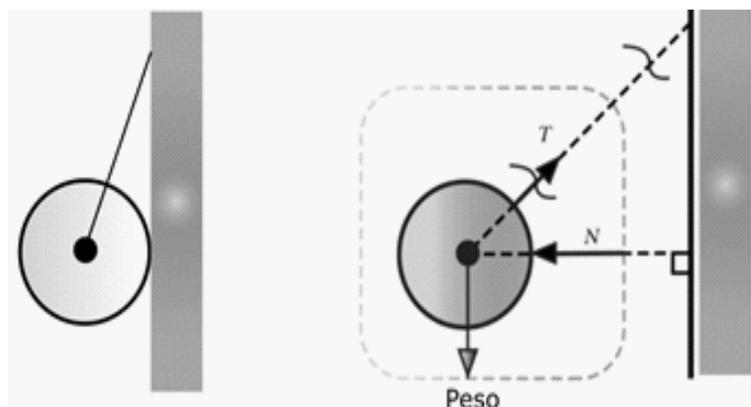
Nótese que las reacciones en el apoyo empotrado se transmiten a la tabla y estas, a su vez, a la base en sentido contrario. Adicionalmente, el peso actúa sobre el tablero.

Ejemplo 40:

El gráfico sugiere una esfera atada a un punto sobre la pared y por encima de la esfera. Esta se encuentra apoyada a su vez en la pared. A la derecha, se detallan las fuerzas que actúan sobre la esfera: T, la tensión que tira a la esfera; N, la fuerza normal que ejerce la pared sobre la pelota; y el peso del cuerpo (figura 10.2).



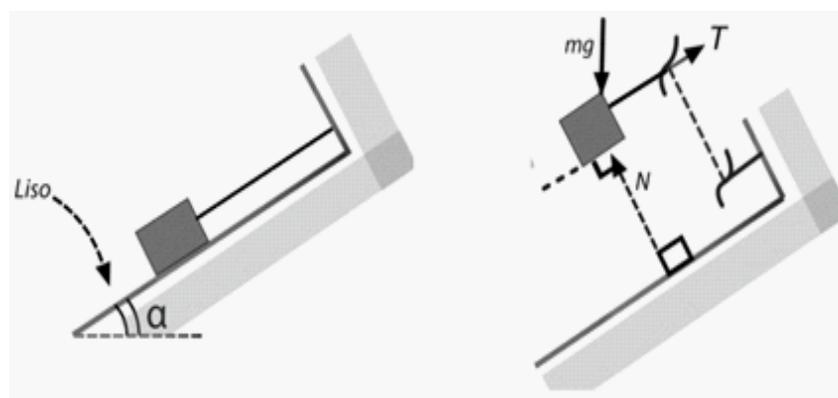
Figura 10.2. Ejemplo para DCL



Ejemplo 41:

Una caja es suspendida por una cuerda que evita que esta se deslice hacia abajo del plano inclinado (figura 10.3). La superficie inclinada es lisa, lo que implica una fuerza de rozamiento nula. La fuerza T representa la tensión de la cuerda y N , la fuerza normal ejercida por la superficie inclinada hacia la caja. Actúa también sobre el sistema, como prácticamente siempre, el peso del cuerpo.

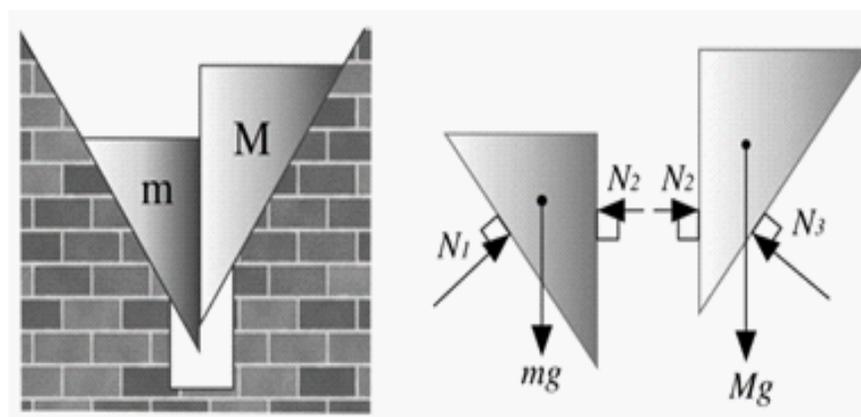
Figura 10.3. DCL en plano inclinado



**Ejemplo 42:**

Los dos cuerpos de la figura 10.4 se apoyan el uno en el otro y a su vez se apoyan en las paredes inclinadas. Dados estos tres puntos de contacto, se generan las fuerzas normales N_1 , N_2 hacia la izquierda, N_2 hacia la derecha, y N_3 . Cada cuerpo además aporta con un peso propio, producto de su respectiva masa por la aceleración de la gravedad g . Cabe destacar que la normal N_2 se duplica debido a su acción y reacción del uno hacia el otro cuerpo. Las paredes también reciben normales debido a cada uno de los objetos, pero no se consideran ya que son de importancia los DCL de los cuerpos y no los de las paredes.

Figura 10.4. DCL en cuerpos en contacto

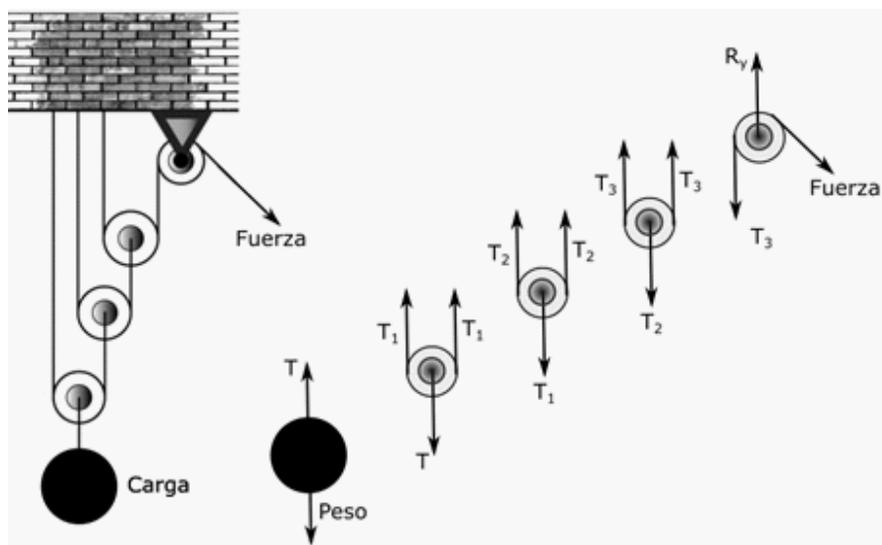
**Ejemplo 43:**

Es común en sistemas de carga el uso de polipastos, un arreglo de poleas que multiplican la fuerza y permiten elevar cargas considerablemente grandes. La figura 10.5 presenta un sistema compuesto de cuatro poleas que elevan una carga mediante una fuerza reducida. Dado que hay múltiples objetos, se pueden obtener múltiples diagramas de cuerpo libre. A la derecha de la figura mencionada, se grafican los DCL de cada elemento, desde la carga hasta la última polea que se encuentra fija al techo.

Una consideración importante es que, a través de una misma cuerda, se ejerce una misma tensión sin importar su recorrido ni de cuántas poleas conecte. En el gráfico existen cuatro cuerdas. De ahí que existan T , T_1 , T_2 y T_3 .



Figura 10.5. DCL en poleas





Ejercicios propuestos

1. Grafica el diagrama de cuerpo libre para los elementos M soportados en los gráficos de las figuras 10.6 y 10.7.

Figura 10.6. Ejemplos de DCL, parte 1

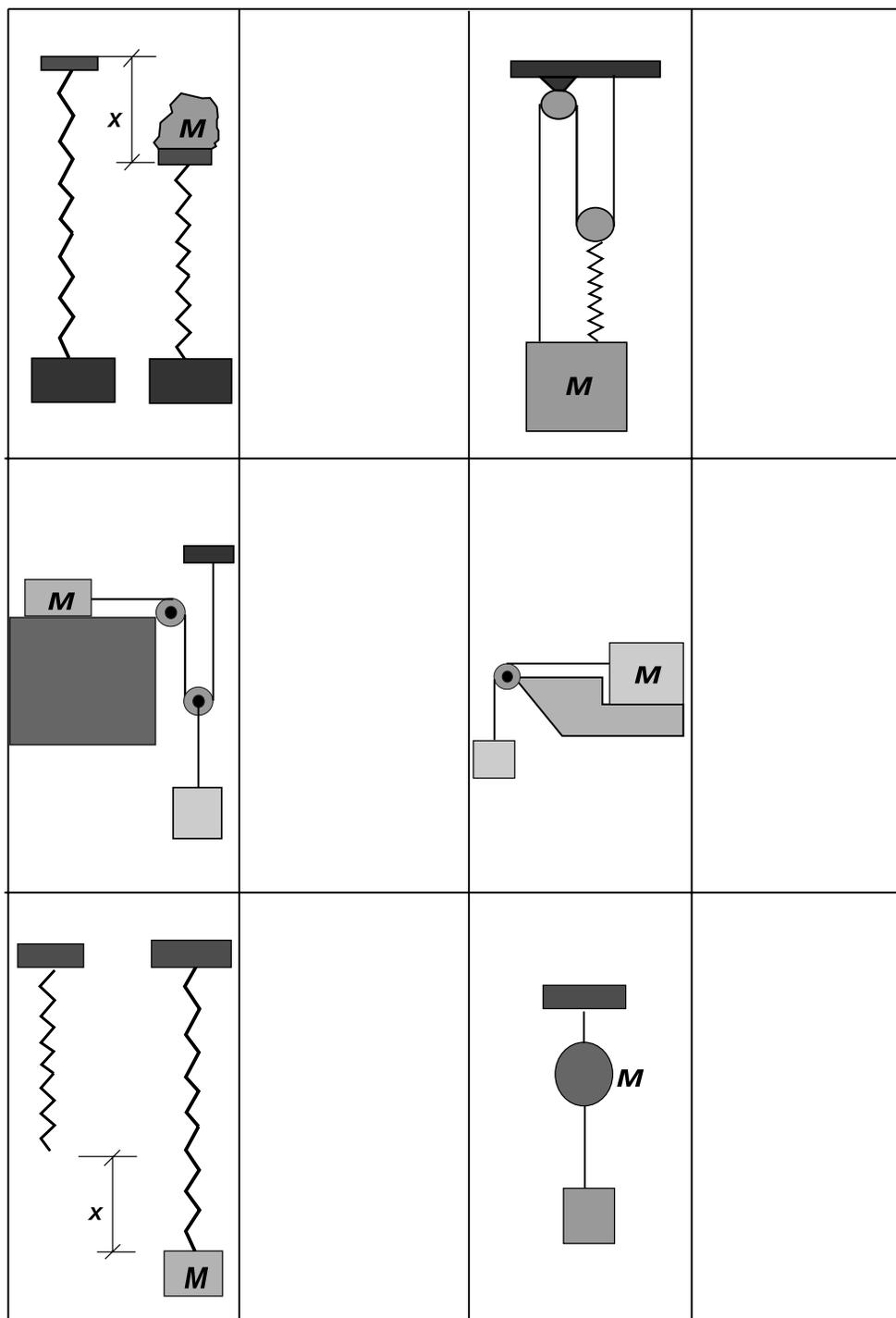
Nombre:

.....

Calificación:



Figura 10.7. Ejemplos de DCL, parte 2

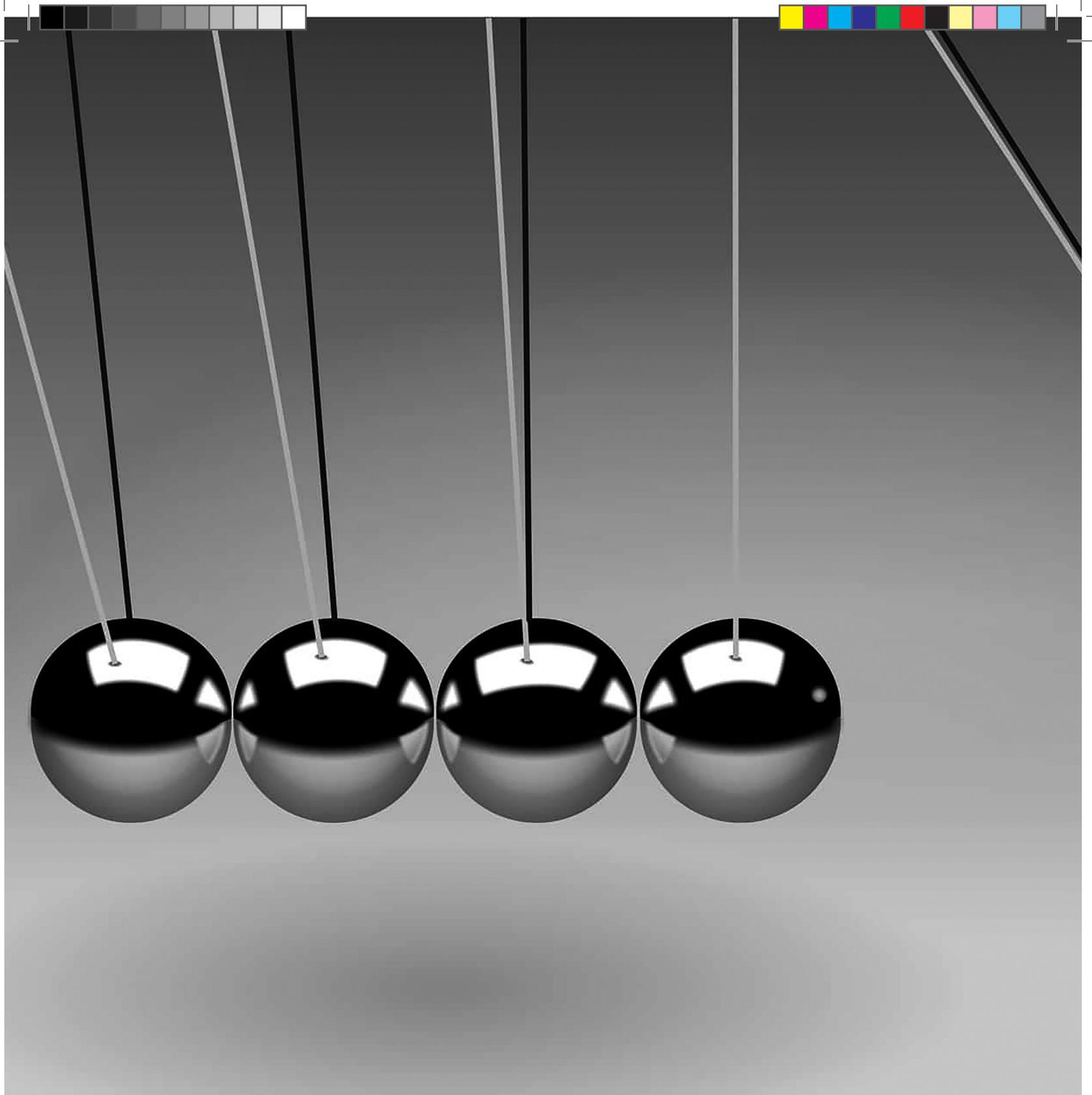


Nombre:

.....

Calificación:





Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las tres leyes de Newton
- ▶ Conoceremos la ley de gravitación universal
- ▶ Resolveremos ejercicios



Capítulo 11

Leyes fundamentales de la mecánica newtoniana

El célebre Isaac Newton contribuyó de forma notoria al desarrollo y comprensión de los fenómenos de la naturaleza, tras emplear años de estudio y experimentación plasmando sus descubrimientos en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* o *Principios matemáticos de la filosofía natural*.

En su obra, Newton detalló las bases fundamentales de la física clásica y de la ley de la gravitación universal. Sin embargo, desarrolló muchas más obras, como *Ópticos*, en la que describe el comportamiento y naturaleza de la luz. Contribuyó a la matemática al desarrollar el cálculo infinitesimal, cuyo mérito compartió con Gottfried Leibniz. Obtuvo además la ley de convección térmica, estudió el sonido y plasmó teorías sobre el origen de las estrellas. Estudió los fluidos y formuló su ley sobre la viscosidad.

El alcance de las leyes de Newton y su genialidad lograron explicar de forma exitosa los fenómenos de la Tierra y de los cuerpos celestes. Así se logró estudiar una inmensidad de fenómenos con tan simples y pocas leyes. Aunque en la actualidad se les hallan múltiples limitaciones, no dejan de ser menos importantes ni menos empleadas para el estudio y desarrollo de la ciencia, a pesar de haber transcurrido tres siglos desde que el gran genio Newton las propuso.



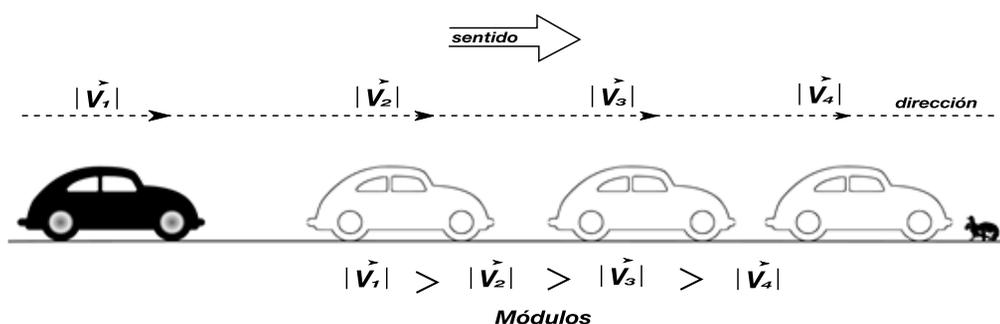


La comprensión de las leyes que rigen la mecánica requiere la conceptualización de ciertos términos previos. Estos caracterizan a un vector, como se abordó en tópicos anteriores.

Hay que tener claro que, en un vector, puede variar sus tres componentes: magnitud, dirección y sentido. Los siguientes casos ejemplifican las variaciones de las componentes del vector velocidad [8].

Primer caso: un vehículo con movimiento en dirección horizontal posee velocidad de magnitud variable y en un mismo sentido. Puede ser el caso de un conductor que se ha percatado de que en la vía reposa un pequeño conejo (figura 11.1). El conductor se ve en la obligación moral de presionar el freno y detenerse para dar oportunidad al conejo de escapar. En este caso, el módulo del vector velocidad varía, pero conserva su dirección y sentido.

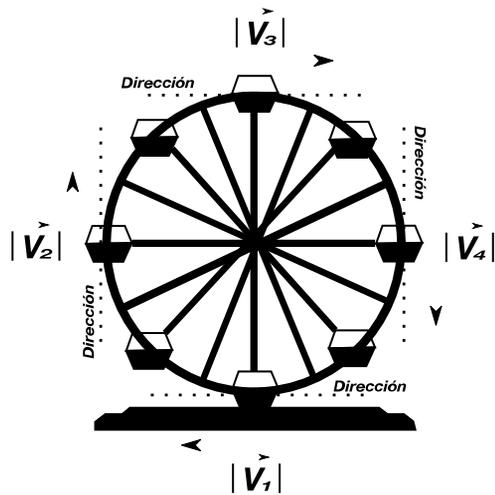
Figura 11.1. Velocidades de variable magnitud y mismo sentido



Segundo caso: la cabina de una noria gira en torno de su eje central (figura 11.2). La rueda que conecta todos los carros gira a una velocidad constante, de donde se puede asegurar que el módulo de la velocidad en los cuatro puntos de análisis será idéntico, mientras que, en la posición más alta y baja, la dirección de sus velocidades será horizontal y, en los otros dos casos, vertical. El sentido es único para cada punto.



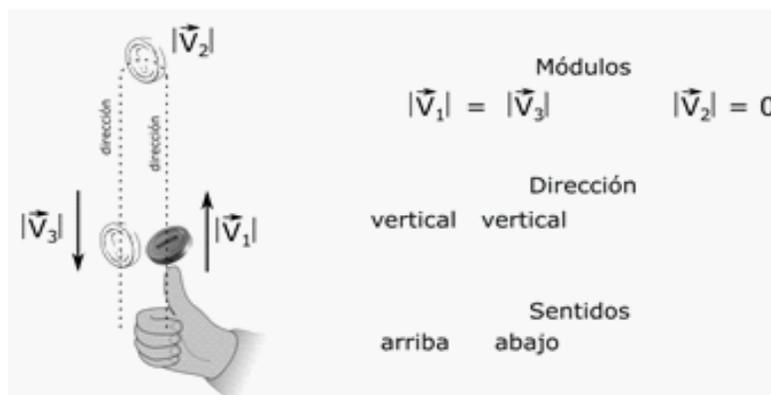
Figura 11.2. Velocidades de igual módulo y diferente sentido



Módulos	
$ \vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}_3 = \vec{V}_4 $	
Dirección	
<i>horizontal</i>	<i>vertical</i>
<i>horizontal</i>	<i>vertical</i>
Sentido	
<i>izquierda</i>	<i>arriba</i>
<i>derecha</i>	<i>abajo</i>

Tercer caso: el lanzamiento de una moneda al aire permite que este alcance un punto más alto y, al descender a la altura de inicio, poseerá una magnitud de velocidad igual que la del lanzamiento (figura 11.3). También su dirección será vertical como al inicio, en tanto que el sentido al salir será hacia arriba y al caer, hacia abajo.

Figura 11.3. Velocidades de igual magnitud y sentidos contrarios



Como se observa en los ejemplos de los casos anteriores, las componentes de un vector pueden variar y han de tenerse presentes en la comprensión de las leyes de Newton.



Primera ley

«Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento)».

Esta primera ley se aplica en dos situaciones claramente definidas: para el caso en que un objeto se encuentra inmóvil, así como cuando se mueve solamente a velocidad constante.

La situación de reposo respecto de objetos circundantes puede lograrse mediante un equilibrio de fuerzas dentro de nuestro planeta, por ejemplo, una roca que descansa sobre la arena. En este caso, el peso de la piedra se equilibra con la fuerza normal que ejerce la arena sobre la piedra para lograr el reposo de la misma.

En cambio, fuera o considerablemente lejos de la gravedad terrestre, si un astronauta decide dejar una pelota libre e inmóvil, esta permanecerá prácticamente estática debido a la carencia de fuerzas externas en el vacío del espacio exterior.

El estudio de la estática toma en cuenta esta ley proponiendo que una estructura estará inmóvil siempre que la sumatoria de fuerzas sea igual a cero, lo cual proviene del comportamiento inercial de la masa para esta primera ley.

Segunda ley

«Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud resultante y en dirección de esta».

La ley se puede expresar generalizada como:

$$F = m \cdot a \quad (11.1)$$

F = fuerza resultante que actúa sobre la partícula

m = masa de la partícula

a = aceleración

Esta ley, a su vez, propone una definición de fuerza como una acción que permite variar la velocidad. Se debe recordar que se pueden variar su magnitud, dirección y sentido. Por tanto, se pueden obtener dos posibilidades o variantes:



una primera, ya abordada y aplicada a movimiento lineal, y una segunda para movimiento rotacional.

En el lugar de la fuerza, el equivalente rotacional es el par neto, y este es igual al producto de la inercia (equivalente a la masa) por su aceleración angular.

$$\tau = I \cdot \alpha \quad (11.2)$$

τ = par neto

I = inercia de la masa

α = aceleración angular

Se explicará con más detalle, en temas posteriores, que la aceleración a su vez también posee componentes, como la tangente a la trayectoria de movimiento, denominada aceleración tangencial, y otra dirigida hacia un centro de rotación, denominada aceleración centrípeta.

Tercera ley

Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentido opuesto.

Ley de la gravitación universal

Establece que dos partículas de masa M y m (figura 11.4) se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas F y $-F$, de magnitud F dada por la fórmula:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (11.3)$$

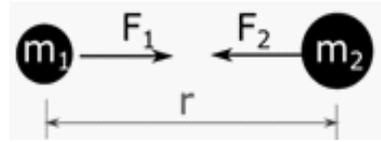
En donde:

r = distancia entre las partículas M y m

G = constante universal o constante de gravitación



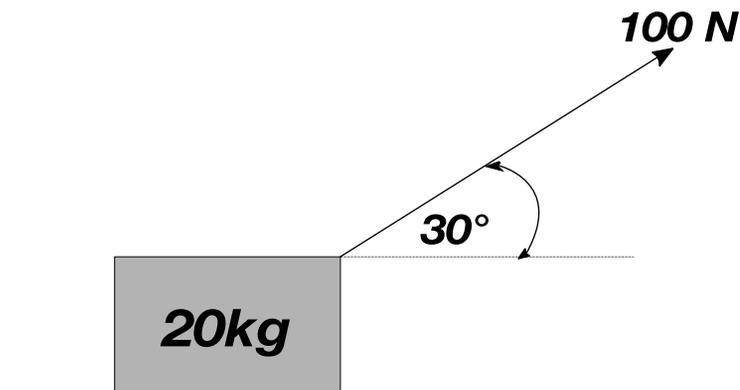
Figura 11.4. Ley de gravitación universal



Ejemplo 44:

Una caja con masa de 20 kg es arrastrada a través del piso por una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál es el valor aproximado del coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el piso, si se aplica una fuerza de 250 N sobre la cuerda (figura 11.5)?

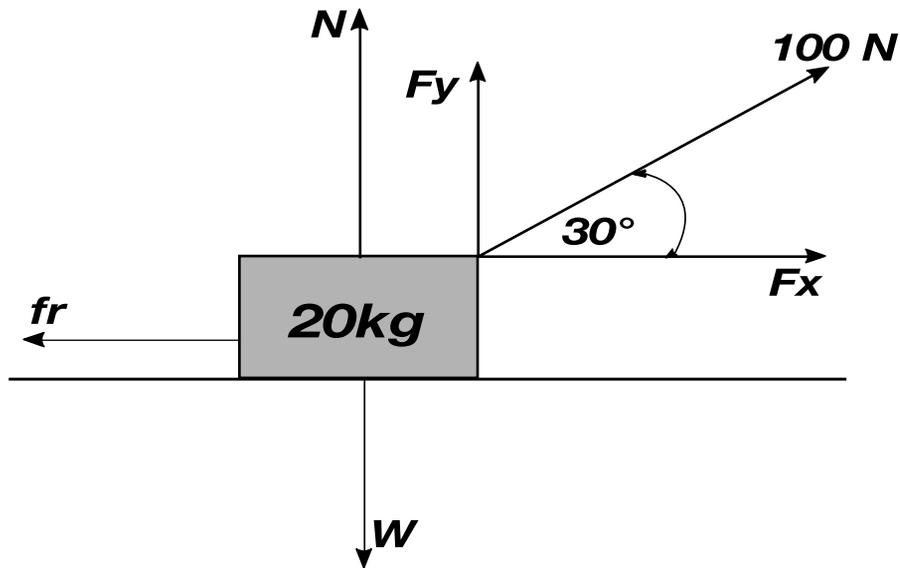
Figura 11.5. Gráfico del ejemplo 44



Descomponemos las fuerzas en los ejes coordenados (figura 11.6).



Figura 11.6. DCL del ejemplo 44



$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_x - fr = 0$$

$$100 \cdot \cos 30^\circ = fr$$

$$100 \cdot \cos 30^\circ = \mu N$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N + F_y - W = 0$$

$$N + 100 \cdot \sin 30^\circ - mg = 0$$

$$N = 20kg \cdot \left(\frac{9,8 m}{s^2}\right) - 100 \cdot \sin 30^\circ$$

Al reemplazar la ecuación obtenida en el eje de las Y en la ecuación obtenida en el eje de las X tenemos:

$$100 \cdot \cos 30^\circ = \mu N$$

$$200 \cdot \cos 30^\circ = \mu \cdot \{(10)(9,8) - 100 \sin 30^\circ\}$$

$$\mu = \frac{(100 \cdot \cos 30^\circ)}{\{(20)(9,8) - 100 \sin 30^\circ\}}$$

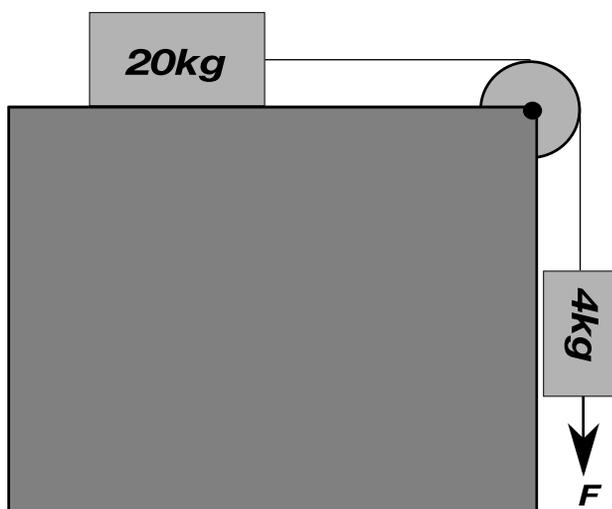
$$\mu = 0,59$$



Ejemplo 45:

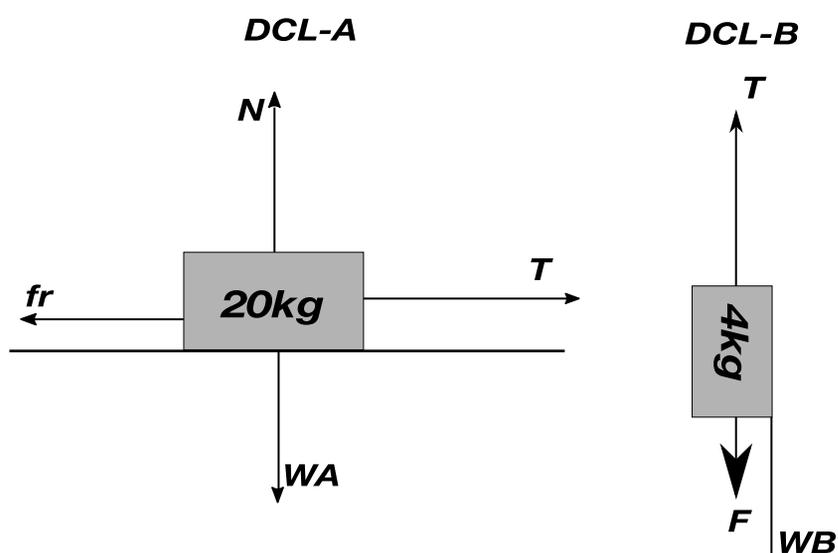
Supongamos que los bloques A y B tienen las masas $M_A = 10 \text{ kg}$ y $M_B = 2 \text{ kg}$. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque A y la superficie es 0,4. Determina el mínimo valor de F para poner el sistema en movimiento. Asume un valor de la gravedad de 10 m/s^2 (figura 11.7).

Figura 11.7. Gráfico del ejemplo 45



Se procede a realizar el diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo (figura 11.8).

Figura 11.8. DCL del ejemplo 45





Se desarrolla en función del cuerpo A:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - W_A = 0$$

$$N = W_A$$

$$N = M_A \cdot g$$

$$N = 20 \cdot 10$$

$$N = 200 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T - fr = 0$$

$$T = \mu N$$

$$T = 0,4 \cdot 200$$

$$T = 80 \text{ N}$$

Se desarrolla en función del cuerpo B:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T - F - W_B = 0$$

$$F = T - W_B$$

$$F = T - M_B \cdot g$$

$$F = 80 - 4 \cdot 10$$

$$F = 40 \text{ N}$$

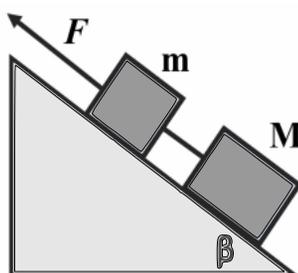


Ejemplo 46:

Dos cuerpos de masas m y M están unidos por una cuerda ideal y son empujados hacia arriba por un plano inclinado de ángulo β con la horizontal (figura 11.9). Calcula la tensión de la cuerda entre los dos cuerpos y la magnitud de la fuerza F si:

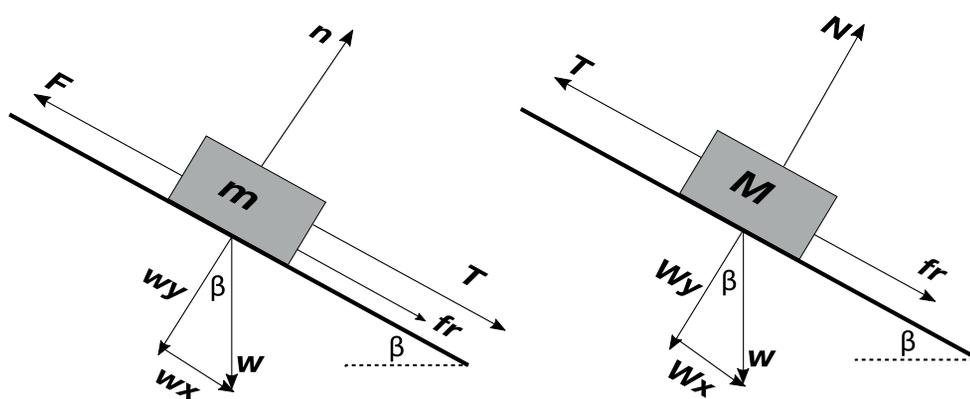
- Los cuerpos se mueven a velocidad constante.
- Los cuerpos suben por el plano inclinado con una aceleración a , si $m=2\text{ kg}$, $M = 3\text{ kg}$, $g = 10\text{ m/s}^2$, $\mu = 0,7$, $\beta = 45^\circ$ y $a = 3\text{ m/s}^2$.

Figura 11.9. Gráfico del ejemplo



El diagrama de fuerzas para ambos casos es el siguiente:

Figura 11.10. DCL, ejemplo



- Como la aceleración de los bloques es cero, al aplicar la segunda ley de Newton para el segundo bloque se puede encontrar la tensión.



Se desarrolla en función del cuerpo de masa m:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$n - wy = 0$$

$$n = wy$$

$$n = mg \cdot \cos \beta$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F = fr + wx + T$$

$$F = \mu n + mg \operatorname{sen} \beta + T$$

Se desarrolla en función del cuerpo de masa M:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - Wy = 0$$

$$N = Wy$$

$$N = Mg \cdot \cos \beta$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T = fr + Wx$$

$$T = \mu N + Mg \operatorname{sen} \beta$$

Reemplazando N en T en función de la masa M:

$$T = \mu Mg \cdot \cos \beta + Mg \operatorname{sen} \beta$$

$$T = Mg (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta)$$

Reemplazando n y T en F:

$$F = \mu n + mg \operatorname{sen} \beta + T$$

$$F = \mu mg \cdot \cos \beta + mg \operatorname{sen} \beta + Mg (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta)$$

$$F = mg (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) + Mg (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta)$$

$$F = g (m + M) (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta)$$



- b. Cuando hay aceleración, se ocupa el mismo razonamiento anterior, teniendo en cuenta que la fuerza neta para cada bloque será su respectiva masa por a . La fuerza neta del bloque de masa M es:

$$\Sigma F_x = M \cdot a$$

$$f_r + W_x - T = M \cdot a$$

$$\mu N + Mg \operatorname{sen} \beta - T = M \cdot a$$

$$T = \mu N + Mg \operatorname{sen} \beta - M \cdot a$$

Al reemplazar N en T en función de la masa M :

$$T = \mu Mg \cdot \cos \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - M \cdot a$$

$$T = M (\mu g \cdot \cos \beta + g \operatorname{sen} \beta - a)$$

Se desarrolla en función del cuerpo de masa m :

$$\Sigma F_y = 0$$

$$n - wy = 0$$

$$n = wy$$

$$n = mg \cdot \cos \beta$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$f_r + wx + T - F = m \cdot a$$

$$\mu n + mg \operatorname{sen} \beta + T - F = m \cdot a$$

Reemplazando n y T en F :

$$F = \mu n + mg \operatorname{sen} \beta + T$$

$$F = \mu mg \cdot \cos \beta + mg \operatorname{sen} \beta + \mu Mg \cdot \cos \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - M \cdot a$$

$$F = \mu mg \cdot \cos \beta + mg \operatorname{sen} \beta + \mu Mg \cdot \cos \beta + Mg \operatorname{sen} \beta - M \cdot a$$

$$F = mg (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) + Mg (\mu \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) - M \cdot a$$



Reemplazando, $m = 2 \text{ kg}$, $M = 3 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\mu = 0,7$, $\beta = 45^\circ$ y $a = 3 \text{ m/s}^2$.

$$F = 2 \cdot 10 (0,7 \cdot \text{Cos } 45^\circ + \text{Sen } 45^\circ) + 3 \cdot 10 (0,7 \cdot \text{Cos } 45^\circ + \text{Sen } 45^\circ) - 3 \cdot 3$$

$$F = 51,09 \text{ N}$$

Ejemplo 47:

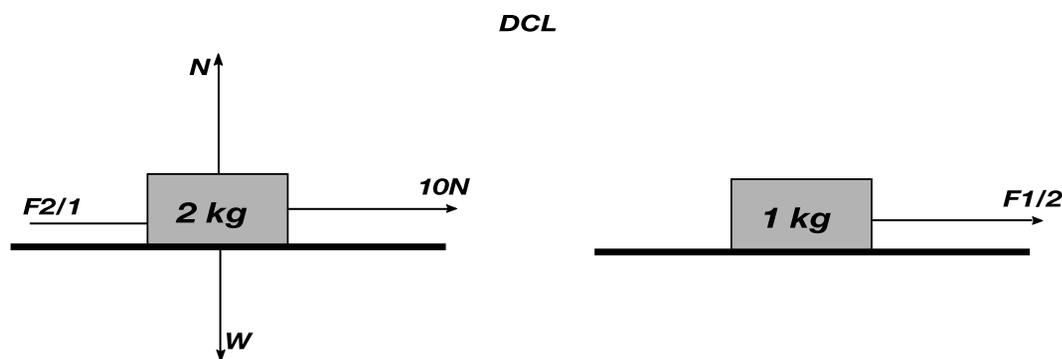
Se aplica, sobre un bloque de masa de $m_1 = 2 \text{ kg}$ una fuerza de magnitud $F = 10 \text{ N}$ (figura 11.11) sin roce. El bloque de masa de 2 kg se encuentra junto a un bloque de masa $m_2 = 1 \text{ kg}$, al que empuja. Determina la magnitud de la aceleración del sistema.

Figura 11.11. Gráfico del ejemplo



Si se toman las dos masas como un solo bloque de masa $m_1 + m_2$, se cancelan las fuerzas de reacción porque son de igual magnitud y distinto signo (figura 11.12). La aceleración de este nuevo bloque es:

Figura 11.12. DCL del ejemplo para unificar masas



$$F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$10 = (3) \cdot a$$

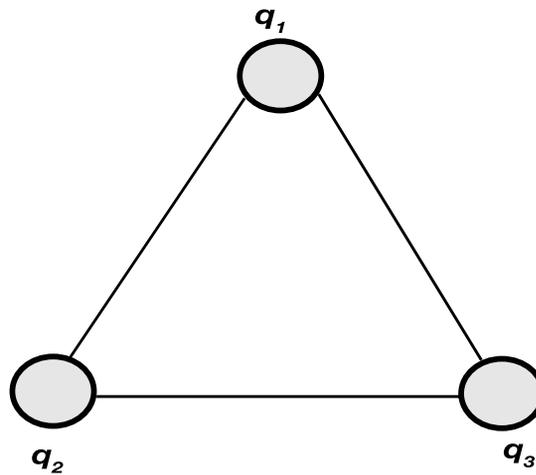
$$a = 1,33 \text{ m/s}^2$$



Ejemplo 48:

En la figura 11.13 se observan tres cargas: $q_1 = 7 \text{ uC}$, $q_2 = 2 \text{ uC}$ y $q_3 = -4 \text{ uC}$, que forman un triángulo equilátero y están separadas entre sí por 0,5 m. Calcula la fuerza resultante que se ejerce sobre la carga q_3 .

Figura 11.13. Gráfico del ejemplo



Datos:

$$q_1 = 7\text{uC} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_2 = 2\text{uC} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_3 = -4\text{uC} = -4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$r = 0,5\text{m}$$

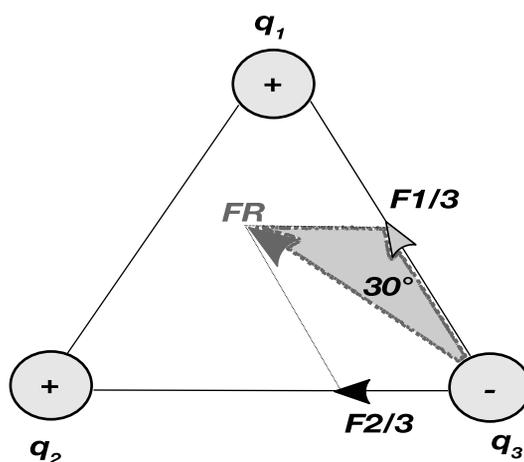
$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}_2 / \text{C}_2$$

Triángulo equilátero, ángulos internos de 60° .

A continuación, se realizará un DCL de las fuerzas que actúan sobre q_3 (figura 11.14):



Figura 11.14. DCL del ejemplo en q_3



$$F_{1/3} = \frac{K \cdot q_2 \cdot q_3}{r^2}$$

$$F_{1/3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{0,5^2}$$

$$F_{1/3} = 1,008 \text{ N}$$

$$F_{2/3} = \frac{K \cdot q_2 \cdot q_3}{r^2}$$

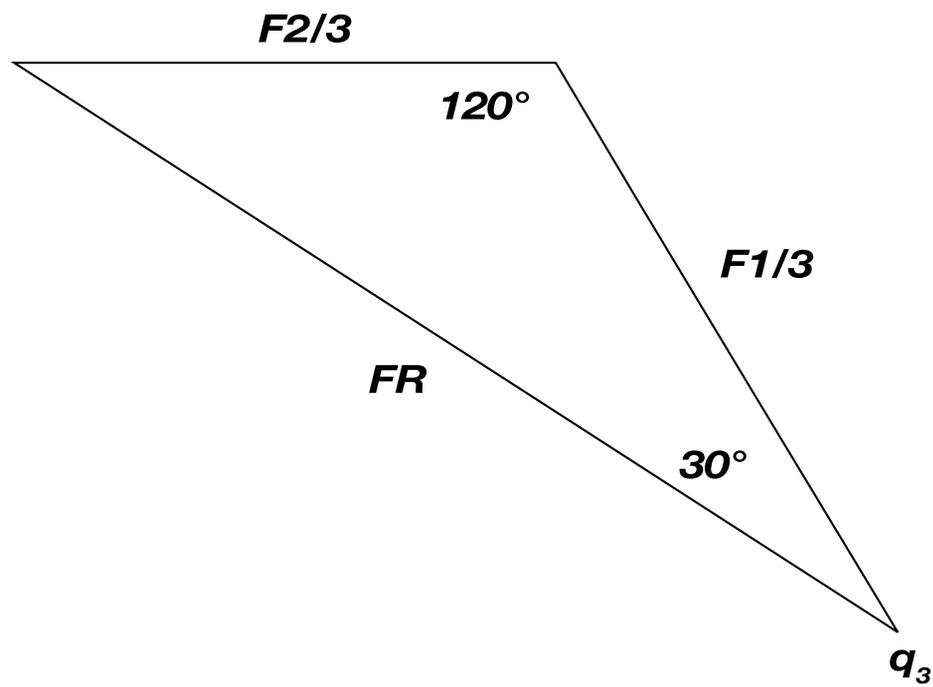
$$F_{2/3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{0,5^2}$$

$$F_{2/3} = 0,288 \text{ N}$$

Para obtener la fuerza resultante FR , debemos aplicar la ley de cosenos (figura 11.15):



Figura 11.15. Triángulo obtenido del ejemplo



$$FR = \sqrt{F1/3^2 + F2/3^2 - 2 \cdot (F1/3) \cdot (F2/3) \cdot \cos 120^\circ}$$

$$FR = \sqrt{1,008^2 + 0,288^2 - 2 \cdot 1,008 \cdot 0,288 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$FR = 1,178 \text{ N}$$



Ejercicios propuestos de las leyes de Newton

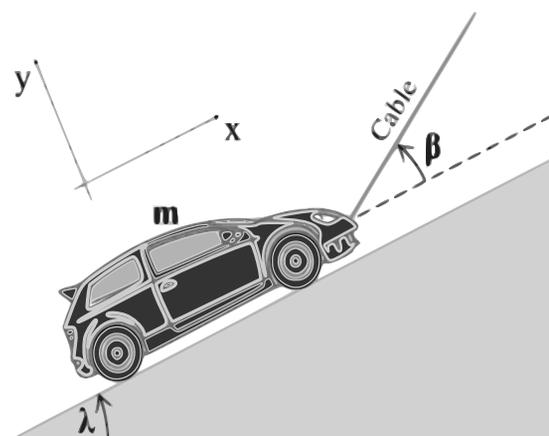
1. En la figura 11.16, dos bloques de masa m y M están sujetos por una cuerda de masa m . Se aplica una fuerza F sobre el bloque hacia arriba, elevando todo el sistema. Indica la aceleración del sistema y la tensión en la parte superior y media de la cuerda.

Figura 11.16. Gráfico del ejercicio



2. En la figura 11.17, un auto de masa m se mantiene en reposo y es sostenido sobre una rampa por una cuerda de masa despreciable. Determina el valor de la tensión máxima de la cuerda para que el auto no se eleve.

Figura 11.17. Gráfico del ejercicio



Nombre:

.....

Calificación:



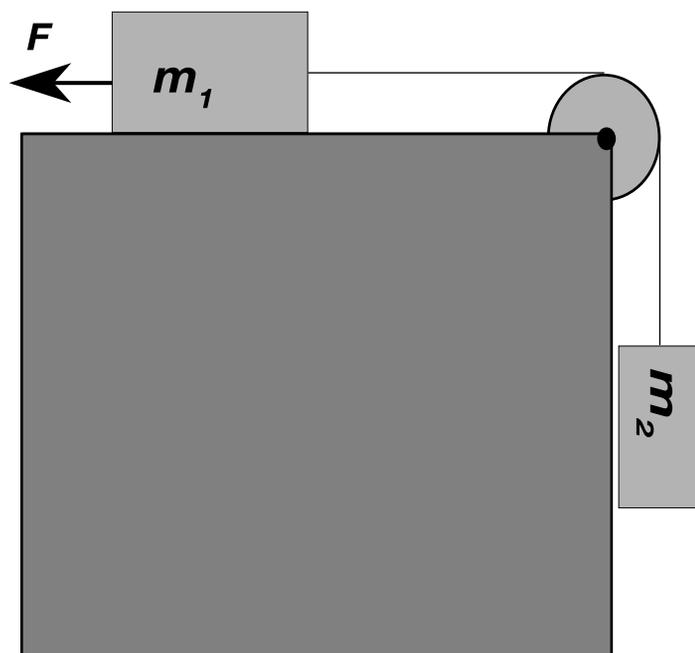
3. En la figura 11.18, dos bloques de 2 kg y 1 kg de masa están unidos por una cuerda ideal y descansan sobre una superficie horizontal sin roce. Si una fuerza de magnitud 20 N se le aplica al bloque de masa m horizontalmente, encuentra la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda que une a los bloques.

Figura 11.18. Gráfico del ejercicio



4. En la figura 11.19, una fuerza de magnitud F actúa sobre un bloque de masa m_1 , el cual se encuentra sobre una superficie horizontal sin roce. Este bloque está unido con un bloque de masa m_2 , que cuelga verticalmente, mediante una cuerda ideal que pasa por una polea ideal sin roce. Si el bloque de masa m_2 se mueve aceleradamente hacia arriba, determine la tensión de la cuerda.

Figura 11.19. Gráfico del ejercicio



Nombre:

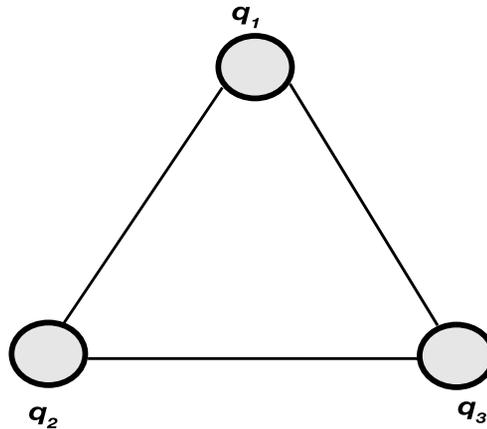
.....

Calificación:



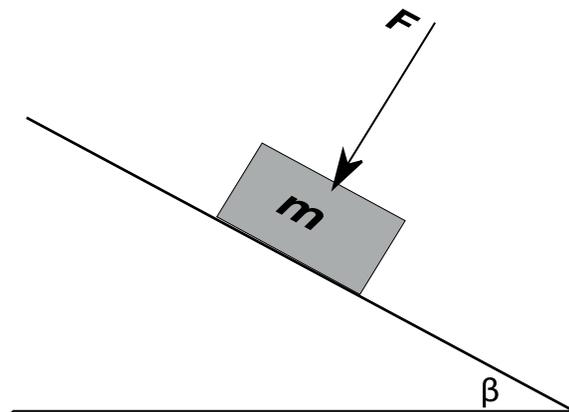
5. En la figura 11.20 se observan tres cargas: $q_1 = 6 \text{ uC}$, $q_2 = 2 \text{ uC}$ y $q_3 = -3 \text{ uC}$ que forman un triángulo equilátero y están separadas entre sí por $0,5 \text{ m}$. Calcula la fuerza resultante que se ejerce sobre la carga q_3 .

Figura 11.20. Gráfico del ejercicio



6. Una fuerza F es usada para sostener un cuerpo de masa m sobre un plano inclinado con ángulo β , tal y como muestra la figura 11.21. Si la fuerza aplicada es perpendicular al plano inclinado, ¿cuál es la mínima fuerza que debe aplicarse para mantener el bloque en reposo? Considera el rozamiento.

Figura 11.21. Gráfico del ejercicio



7. Un martillo de masa m con velocidad inicial v_i es detenido por un clavo de masa despreciable a una distancia d desde que toca el clavo. Además, la persona que utiliza el martillo le aplica una fuerza P a este en dirección

Nombre:

.....

Calificación:



Fundamentos de Mecánica para Ingeniería

Teoría y Práctica

al clavo. Cuando el martillo impacta, ambos se mueven con aceleración constante hacia abajo. Determina la magnitud de la fuerza de reacción entre el clavo y el martillo.

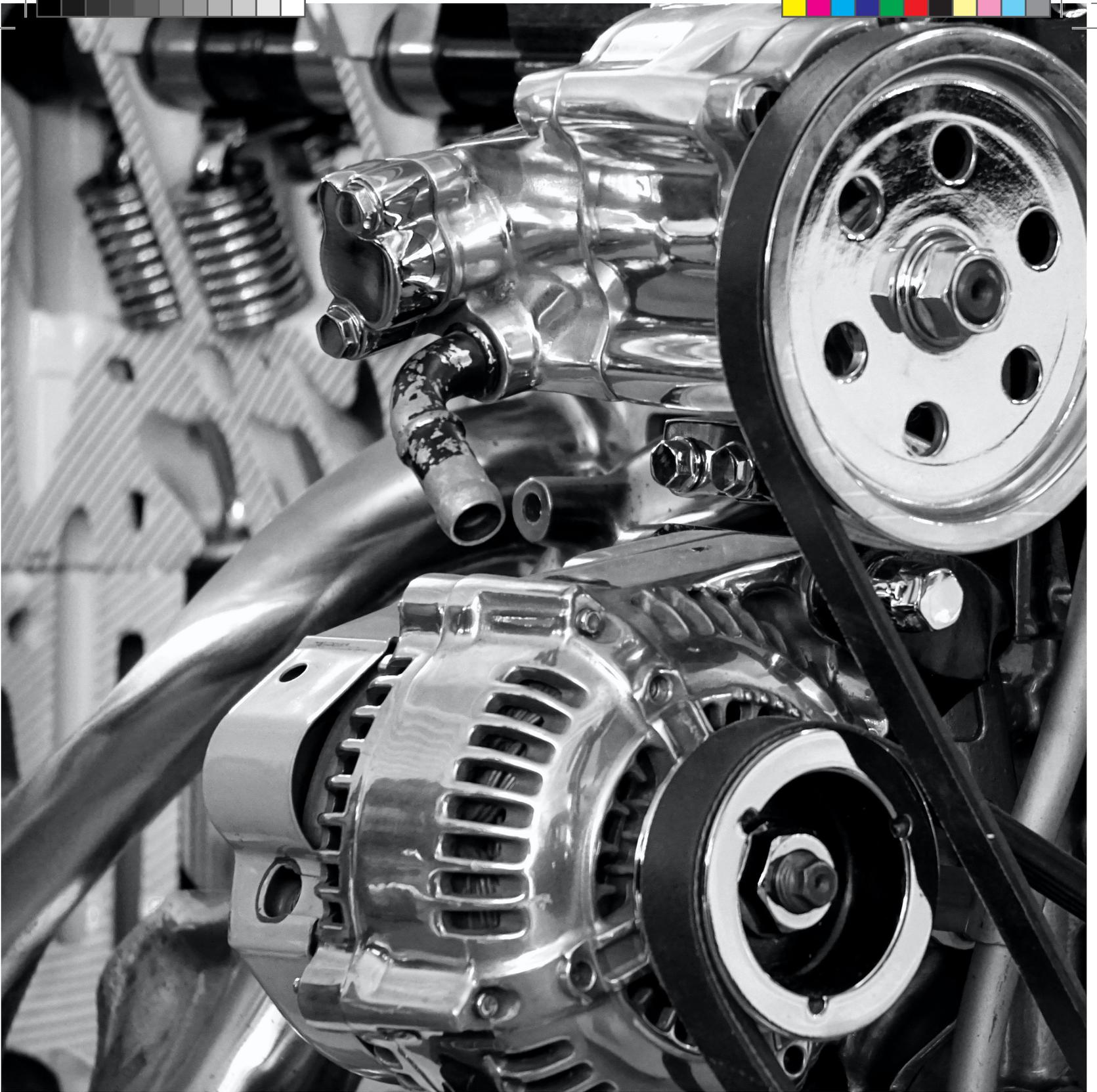
8. Un hombre empuja una pared rígida que no se puede mover. ¿Qué afirmación es la correcta? Justifica y grafica un esquema del problema.
 - a. El hombre no puede estar en equilibrio debido a que ejerce una fuerza neta sobre la pared.
 - b. Si el hombre ejerce una fuerza de 100 N, entonces podemos asegurar que la pared ejerce sobre el hombre una fuerza igual a 100 N.

Nombre:

.....

Calificación:





12

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos sobre el equilibrio de una partícula en el espacio
- ▶ Resolveremos ejercicios



Capítulo 12

Equilibrio de una partícula en el espacio

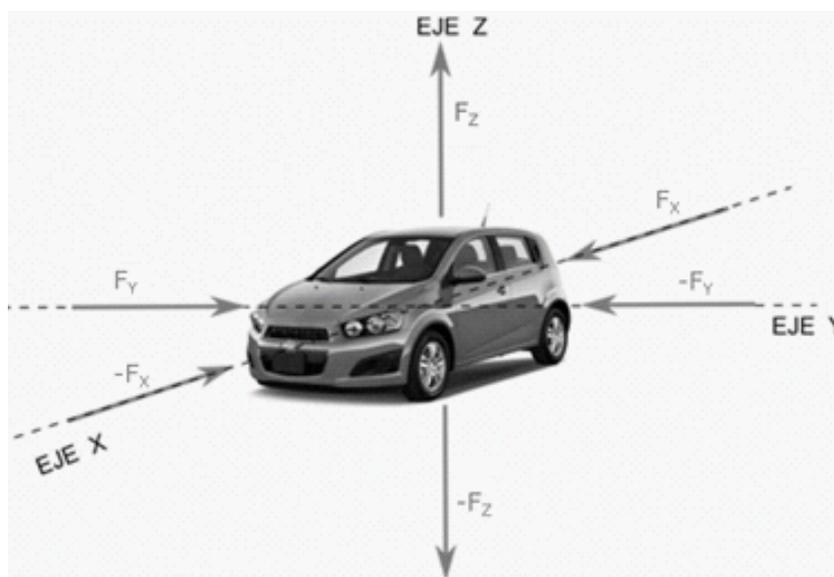
La primera ley de Newton propone que un cuerpo tiende a mantener su estado de reposo hasta cuando exista una fuerza que le obligue a cambiarlo. No obstante, el reposo también puede lograrse con la aplicación de fuerzas siempre y cuando estas tengan una resultante nula.

Piensen en un vehículo estacionado en la calle (figura 12.1). El vehículo en reposo es presa de la acción de múltiples fuerzas. El asfalto de la calle realizará la fuerza F_z al soportar el peso del vehículo, evitando que descienda del nivel de la calle. El peso del vehículo corresponde a la fuerza $-F_z$. Las fuerzas F_x y $-F_x$ harían que el vehículo pudiera desplazarse hacia adelante o hacia atrás; sin embargo, si pensamos que el vehículo está parqueado pendiente abajo, entonces la fuerza F_x será una porción del peso que tiende a que el vehículo resbale. No obstante, el freno de mano del vehículo, al trabar la llanta, permite que esta fricione el asfalto realizando la fuerza $-F_x$ que anula a F_x e impide el movimiento en ese eje. Si el vehículo se hallara en una zona alta en donde el viento es considerable, posiblemente este podría ejecutar una fuerza F_y o $-F_y$ en las caras laterales del vehículo en las que existe mayor área de impacto contra el aire. En el sentido en que el viento actúe, la fricción lateral de las llantas generaría la fuerza suficiente para mantener en reposo al vehículo. Como es claro en este ejemplo, no solamente la carencia



de fuerzas (caso no real dentro de nuestro globo terráqueo) lograría un equilibrio de un objeto en el espacio, sino también la anulación de fuerzas.

Figura 12.1. Estado de reposo con aplicación de fuerzas externas



Para realizar este análisis se utilizan las ecuaciones que se obtienen de la segunda ley de Newton para cuando la fuerza es nula, en vista de que no existe aporte de aceleración al sistema.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

El empleo de estas tres ecuaciones representa condiciones suficientes y necesarias para analizar el equilibrio de una partícula, siempre que no existan más de tres incógnitas para resolver un sistema. A más de ello, se emplearán los conceptos adquiridos en los ejemplos de vectores unitarios anteriormente presentados.

Una herramienta indispensable para el análisis de equilibrio es la generación de diagramas de cuerpo libre considerando todas las fuerzas actuantes como se abordó con anterioridad.

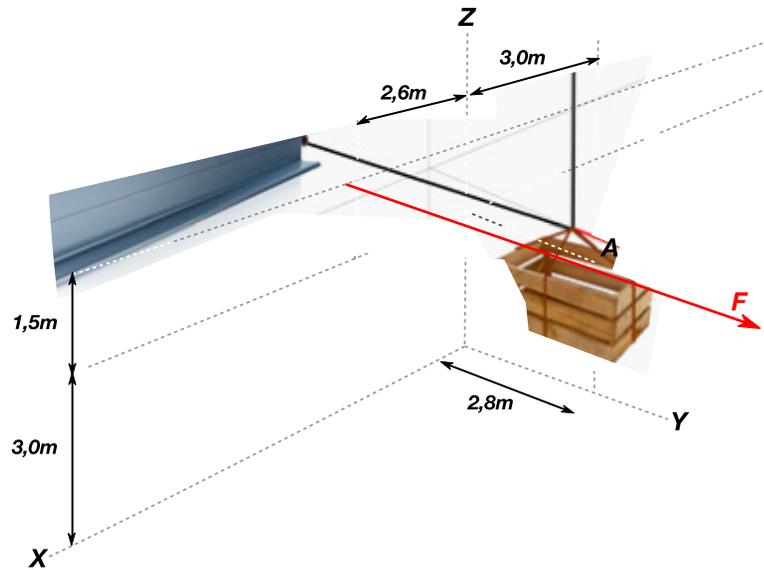
Ejemplo 49:

Una caja de 30 kg es sujeta por dos cables hacia vigas metálicas fijas. Se aplica una fuerza F de tal manera que aleja la caja de las vigas y la ubica como



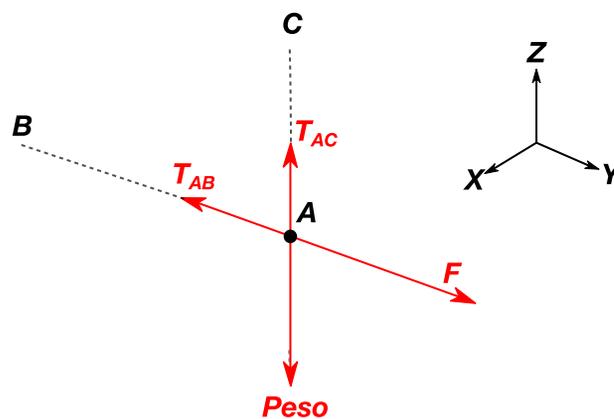
en el esquema de la figura 12.2. Determina la fuerza que se requiere y la tensión de cada cable.

Figura 12.2. Ejemplo para análisis de equilibrio



Es indispensable distinguir el punto A como aquel donde concurren las fuerzas, dos tensiones y la fuerza aplicada F (figura 12. 3). Por ello se requiere el diagrama de cuerpo libre para ese punto.

Figura 12.3. Determinación de fuerzas en equilibrio (ejemplo)



Dada la descripción gráfica que provee el ejemplo, podemos obtener el vector unitario de cada fuerza para, con ello, realizar la sumatoria de fuerzas y estudiarla en equilibrio.



En función de los ejes presentados, los vectores que actuarán en el DCL del punto A serán:

Fuerza	$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_F$
Peso	$\vec{P} = 30 \cdot \vec{u}_P$
Tensión en la cuerda AB	$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \cdot \vec{u}_{TAB}$
Tensión en la cuerda AC	$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \cdot \vec{u}_{TAC}$

A continuación, y empleando las dimensiones del dibujo, se calcularán los respectivos vectores unitarios.

$$\vec{u}_F = \vec{j}$$

$$\vec{u}_P = -\vec{k}$$

$$\vec{u}_{TAB} = \frac{\vec{T}_{AB}}{|\vec{T}_{AB}|} = \frac{2,6 \vec{i} - 2,8 \vec{j} + 1,5 \vec{k}}{\sqrt{(2,6)^2 + (-2,8)^2 + (1,5)^2}} = 0,63 \vec{i} + 0,68 \vec{j} + 0,37 \vec{k}$$

$$\vec{u}_{TAC} = \frac{\vec{T}_{AC}}{|\vec{T}_{AC}|} = \frac{-3 \vec{i} - 2,8 \vec{j} + 1,5 \vec{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-2,8)^2 + (1,5)^2}} = 0,69 \vec{i} + 0,64 \vec{j} + 0,34 \vec{k}$$

Una vez obtenidos todos los unitarios, se pueden representar los vectores respectivos como el producto de su módulo por su unitario.

Fuerza	$\vec{F} = 0 \vec{i} + F \vec{j} + 0 \vec{k}$
Peso	$\vec{P} = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} - 30 \vec{k}$
Tensión en la cuerda AB	$\vec{T}_{AB} = T_{AB} (0,63 \vec{i} + 0,68 \vec{j} + 0,37 \vec{k})$
Tensión en la cuerda AC	$\vec{T}_{AC} = T_{AC} (-0,69 \vec{i} + 0,64 \vec{j} + 0,34 \vec{k})$



La sumatoria de estos cuatro vectores deberá ser cero para que la partícula o punto A se encuentre estática y en equilibrio. Tanto la suma de los vectores como de sus componentes en cada uno de los ejes deberá ser igual a cero.

$$\sum F_x = 0$$

$$0 + 0 + 0,63 T_{AB} - 0,69 T_{AC} = 0$$

$$0,63 T_{AB} = 0,69 T_{AC}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F + 0 + 0,68 T_{AB} + 0,64 T_{AC} = 0$$

$$0,68 T_{AB} + 0,64 T_{AC} = F$$

$$\sum F_z = 0$$

$$0,30 + 0,37 T_{AB} + 0,34 T_{AC} = 0$$

$$0,37 T_{AB} + 0,34 T_{AC} = 30$$

Obtenidas las tres ecuaciones, se resuelve el sistema y determinan las incógnitas planteadas.

$$T_{AB} = 44,09 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 40,26 \text{ N}$$

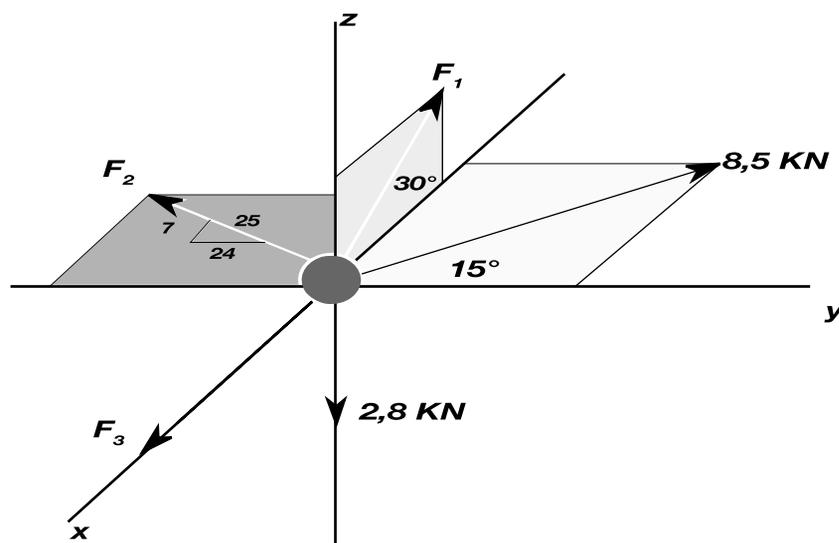
$$F = 55,72 \text{ N}$$

Ejemplo 50:

Determina las magnitudes de F_1 , F_2 y F_3 para el equilibrio de la partícula (figura 12. 4).



Figura 12.4. Gráfico del ejemplo



Expresiones vectoriales:

$$F_1 = -F_1 \cos 30^\circ \mathbf{i} + F_1 \sin 30^\circ \mathbf{k}$$

$$F_2 = -F_2 (7/25) \mathbf{i} - F_2 (24/25) \mathbf{j}$$

$$F_3 = F_3 \mathbf{i}$$

$$F_{8,5} = -8,5 \sin 15^\circ \mathbf{i} + 8,5 \cos 15^\circ \mathbf{j}$$

$$F_{2,8} = -2,8 \mathbf{k}$$

Ecuaciones de $\Sigma F_x = 0;$ $-F_1 \cos 30^\circ - F_2 (7/25) + F_3 - 8,5 \sin 15^\circ = 0$

Equilibrio: $\Sigma F_y = 0;$ $-F_2 (24/25) + 8,5 \cos 15^\circ = 0$

$\Sigma F_z = 0;$ $F_1 \sin 30^\circ - 2,8 = 0$

Resolviendo:

$$F_2 = 8,55 \text{ kN}$$

$$F_1 = 5,6 \text{ kN}$$

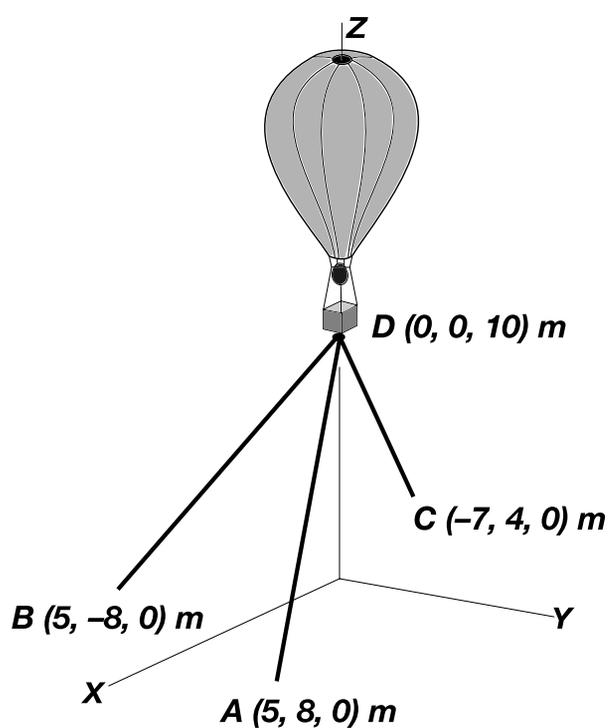
$$F_3 = 9,44 \text{ kN}$$



Ejercicios propuestos de equilibrio de una partícula en el espacio

1. El globo de aire caliente representado en la figura 12.5 está sujeto por tres cables de amarre. Si el empuje total del globo es 4,25 kN, determina la fuerza que ejerce sobre el globo cada uno de los tres cables.

Figura 12.5. Gráfico del ejercicio



2. Un cilindro de 12 kN pende de un sistema de cables según se indica en la figura 12.6. Determina las tensiones de los cables A, B y C.

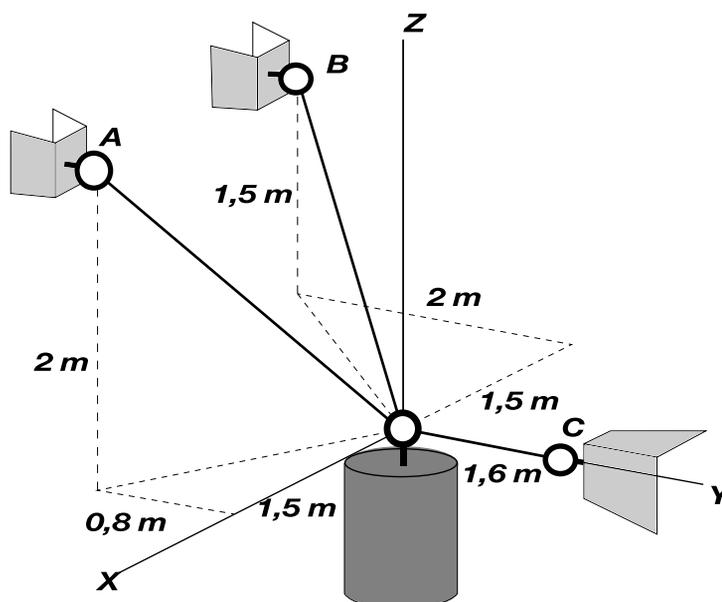
Nombre:

.....

Calificación:

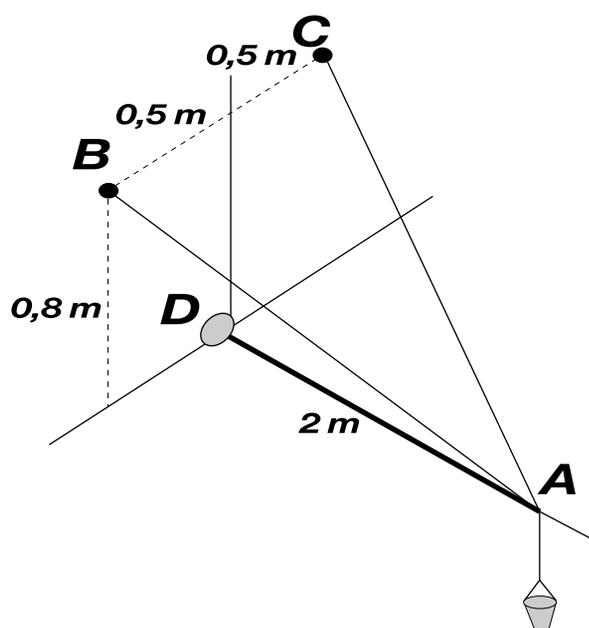


Figura 12.6. Gráfico del ejercicio



3. La barra de la figura 12.7 es un soporte para sostener una maceta de 20 kg de peso. Determina la tensión desarrollada en los cables AB y AC.

Figura 12.7. Gráfico del ejercicio

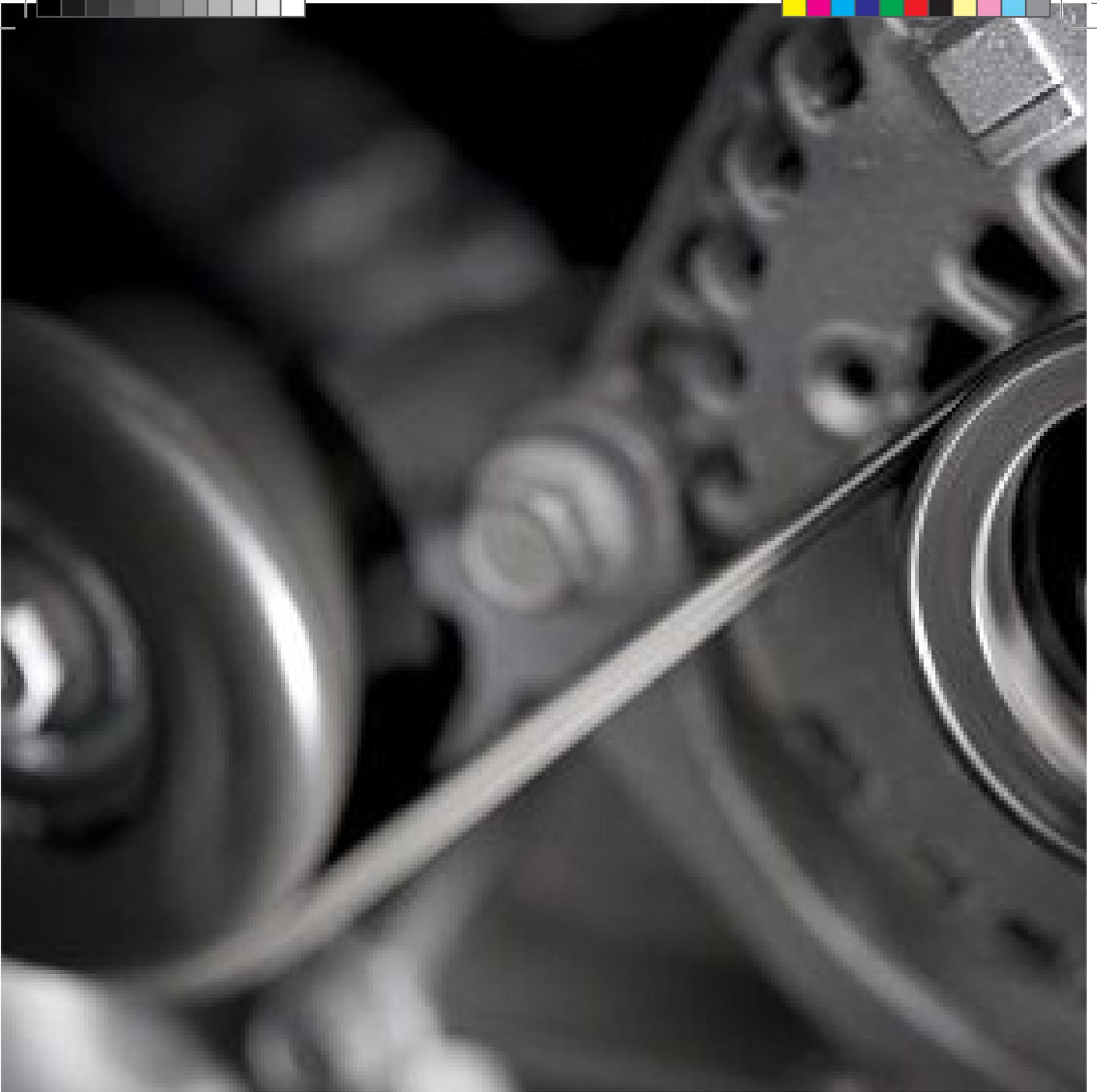


Nombre:

.....

Calificación:





13

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Aprenderemos sobre la posición de los cuerpos
- ▶ Resolveremos ejercicios



Capítulo 13

Mecánica de cuerpos rígidos

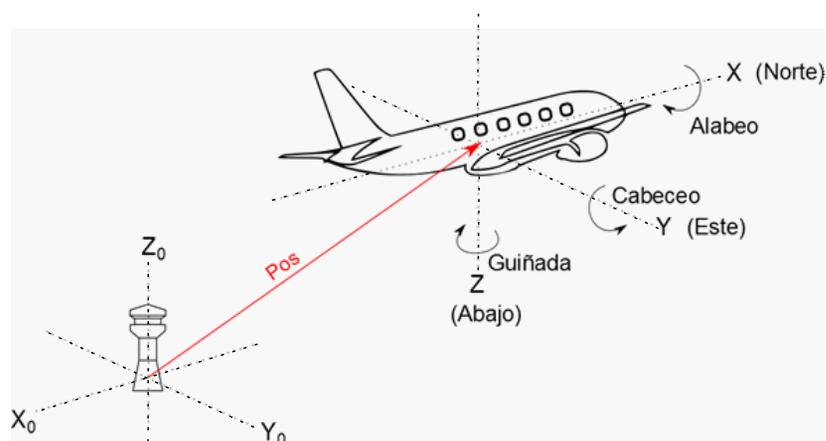
La característica que distingue a los cuerpos rígidos de los flexibles es la capacidad de mantener inalterables las posiciones relativas del mismo cuerpo ante la aplicación de fuerzas externas. La consideración de cuerpos rígidos también permite solucionar múltiples problemas de la vida real. Sin embargo, toda fuerza genera deformación en los cuerpos. Cuando estas son pequeñas, es la mecánica de materiales la que analiza el comportamiento de los esfuerzos mediante el estudio de la resistencia.

El objetivo de este apartado es describir las herramientas y consideraciones para determinar la posición y orientación de los cuerpos rígidos en el espacio.

Ubicar una partícula en el espacio es una tarea relativamente sencilla en vista de que, si se trata de un espacio euclídeo de tres ejes ortogonales, se requerirán solamente tres coordenadas para ubicarlo. En tanto que, para ubicar un cuerpo, adicionalmente deberán especificarse rotaciones a fin de realizar un estudio coherente de su comportamiento.



Figura 13.1. Posición y orientación de un sólido en el espacio



Para ejemplificar la importancia de la posición y rotación de un sólido rígido en el espacio, se cita el caso de un avión (figura 13.1) que se ubica respecto de una torre de transmisión en un aeropuerto. En estos casos, además de las coordenadas, son de interés para el piloto y la base de control tres ángulos: alabeo, cabeceo y guiñada. Con su ayuda, se puede describir completamente la posición y orientación del avión respecto de un sistema de referencia.

Para analizar las múltiples posibilidades que existen y son empleadas en sistemas de navegación, vehículos aeroespaciales y otros sistemas en movimiento, se estudiarán algunos ejemplos de sistemas de representación de posición y orientación en el espacio.

Sistemas de representación de posición

Físicamente hablando, un sistema de coordenadas es un sistema de referencia que permite describir la posición de un objeto de forma única. Sin embargo, existen muchas más alternativas y soluciones a diversa escala.

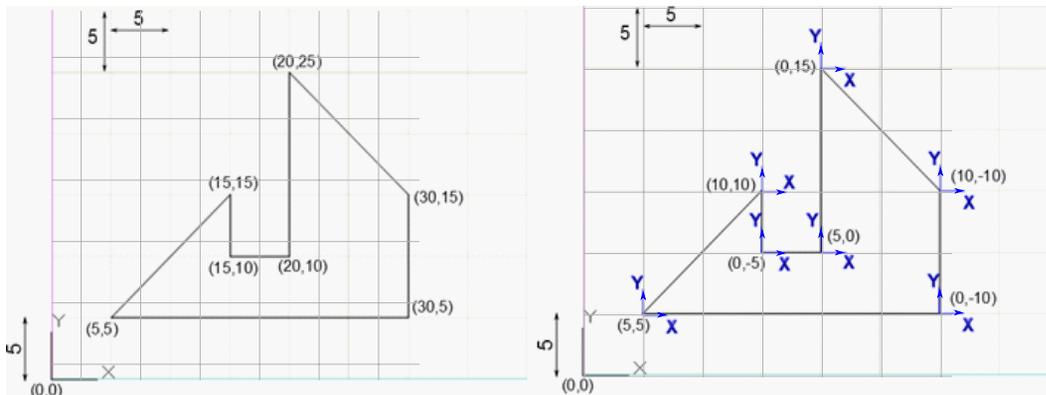
Los sistemas de referencia se eligen de manera conveniente al observador o a al método de medición empleado. Así, por ejemplo, en cuanto a la Tierra, un sistema de latitud y longitud es adecuado y sus referencias son la línea ecuatorial (latitud 0°) y la línea que pasa por el Real Observatorio de Greenwich de Inglaterra (longitud 0°).

El sistema de posicionamiento global o GPS (por sus siglas en inglés) emplea como referencia cuatro satélites (de más de 24 que se complementan) para ubicar objetos sobre la superficie de la tierra. En este caso, los sistemas de referencia no son un punto, sino al menos cuatro, y emplean una técnica denominada trilateración.



En los casos anteriores, se analizaron ejemplos de referencias fijas y otras que son móviles o no únicas. Por esta razón se hace útil destacar un sistema de referencia absoluto de un relativo.

Figura 13.2. Coordenadas absolutas y relativas



En la figura 13.2, a la izquierda, se ejemplifican coordenadas basadas en un punto único y absoluto u origen coordenado $(0,0)$, es decir, son absolutas. En tanto, a la derecha de la misma figura, se observa que las coordenadas de cada punto están escritas con referencia a su punto anterior (si el gráfico se realiza de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba). En este caso, se han empleado coordenadas relativas al punto anterior.

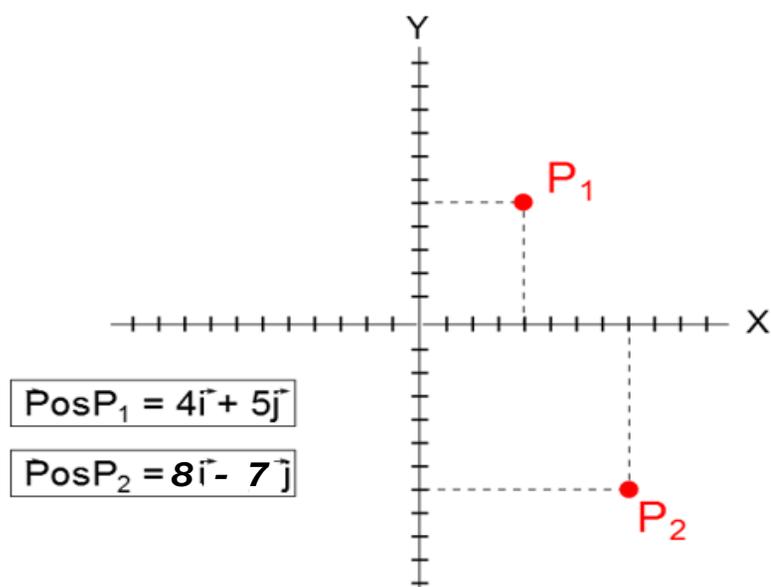
Sistema de coordenadas cartesianas

René Descartes, filósofo, matemático y físico francés, empleó por primera vez un sistema de coordenadas ortogonales para definir la distancia al origen de las proyecciones ortogonales sobre cada uno de los ejes. Esta representación bidimensional de dos líneas de referencia que se cortan para generar cuatro cuadrantes es ampliamente utilizada para el estudio de la mecánica (figura 13.3).

Si se considera la torre de control de la figura 13.1 y sus ejes de referencia, se puede saber que el avión se encontrará en una posición X, Y, Z . Pero también será deseable su orientación respecto de estos mismos ejes.



Figura 13.3. Sistema de coordenadas cartesianas

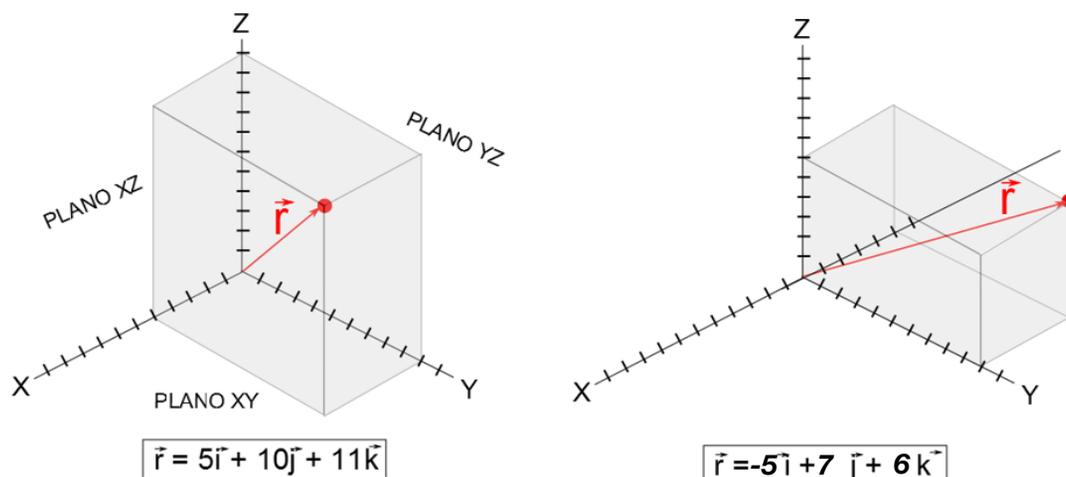


La base ortonormal de este sistema se define mediante vectores unitarios o vectores perpendiculares y de módulo la unidad.

Sistema de coordenadas cartesianas espaciales

El caso anterior se extiende al espacio tridimensional definido por tres planos que se cortan en el punto de origen. Este sistema de referencia define coordenadas X, Y, Z como proyecciones ortogonales de una posición sobre las tres aristas que definen los planos XY, YZ y XZ (figura 13.4).

Figura 13.4. Sistema de coordenadas espaciales

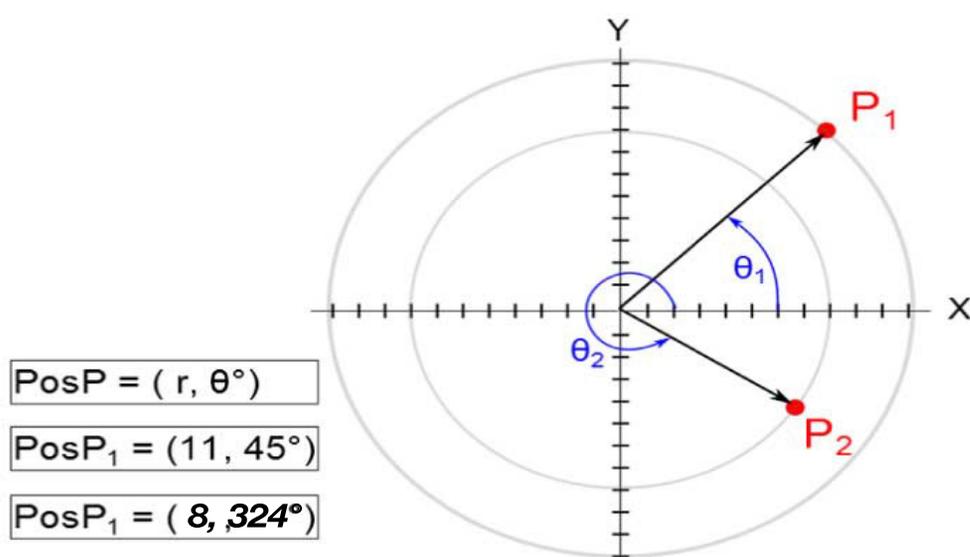




Sistema de coordenadas polares

Existe también el sistema de coordenadas polares para el plano 2D, que define la posición de un punto mediante un ángulo θ (respecto del eje polar) y una distancia r (desde el origen hasta el punto P). Se observa un ejemplo de esta representación en la figura 13.5.

Figura 13.5. Sistema de coordenadas polares

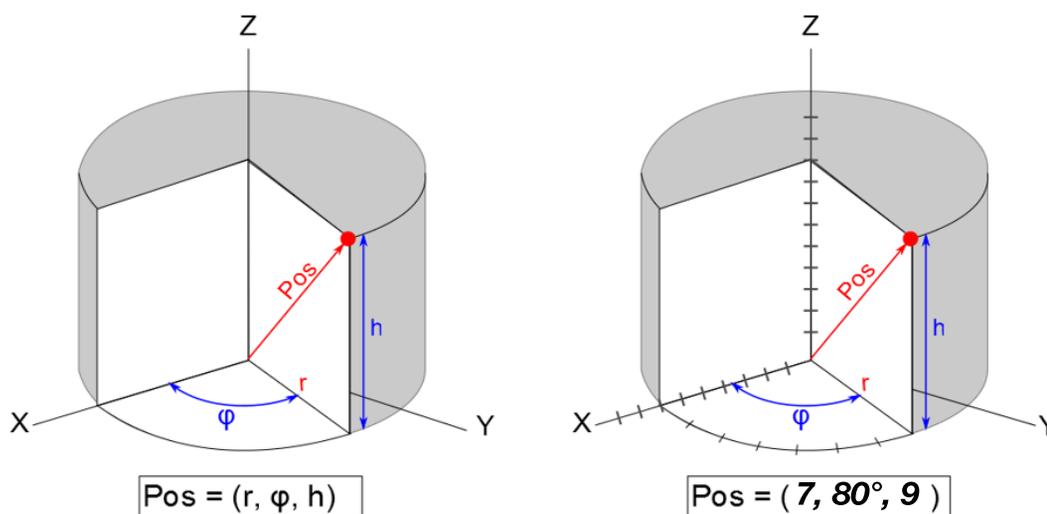


Sistema de coordenadas cilíndrico

El sistema de coordenadas cilíndrico ubica la posición de un punto en el espacio considerando un radio r (base de un cilindro imaginario), un ángulo respecto de la dirección X de referencia, y la altura h (del mismo cilindro). La figura 13.6 ilustra el sistema y la ubicación de un punto.



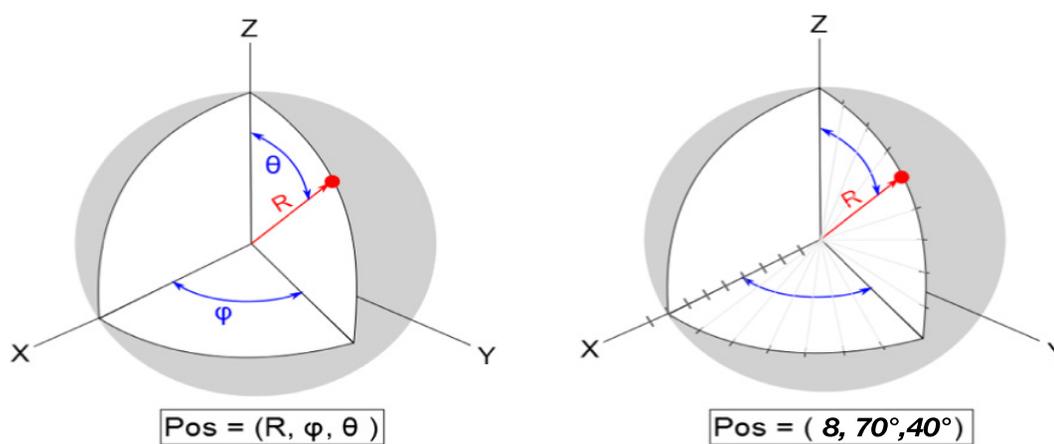
Figura 13.6. Sistema de coordenadas cilíndrico



Sistema de coordenadas esférico

El sistema de coordenadas esférico ubica un punto considerando R (radio de una esfera imaginaria), el ángulo π respecto a X en el plano XY , y el ángulo θ respecto a la dirección Z en su sentido positivo (figura 13.7).

Figura 13.7. Sistema de coordenadas esférico



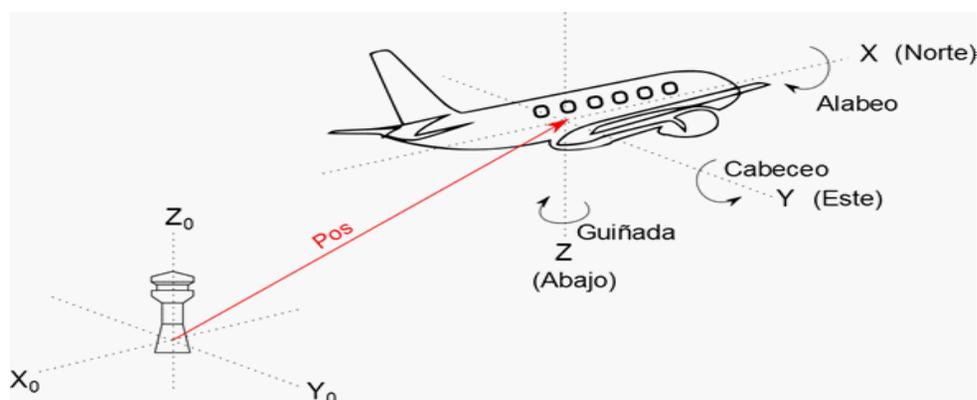


Sistemas de representación de orientación en el espacio

Rotación X, Y, Z

Considerando el ejemplo de la figura 13.8, se puede observar que existen rotaciones en cada uno de los ejes del sistema de referencia asociado al avión, el mismo que puede coincidir o no con el de la torre de control en tierra. Se sobrescriben las rotaciones para cada eje como RotX, RotY, RotZ. Nótese que se presentan los sentidos de giro positivos en cada eje.

Figura 13.8. Rotaciones de un objeto en el espacio



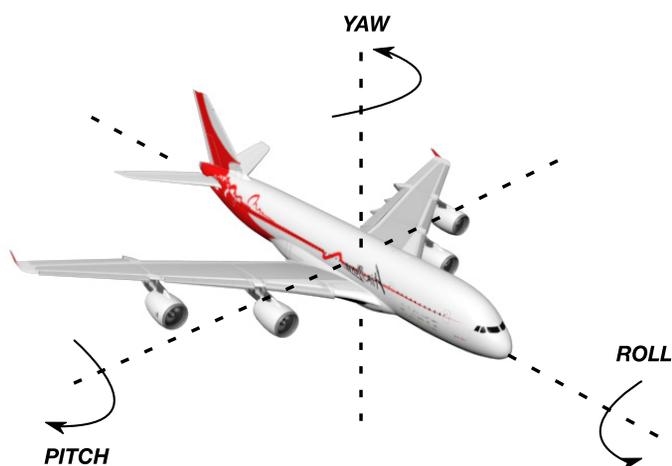
El sistema de navegación de los aviones, así como el de un teléfono celular en la actualidad, está dotado de sensores que permiten determinar el ángulo de giro en cada uno de los ejes. Estos ángulos son aprovechados para un posicionamiento automático de la aeronave o para aplicaciones de videojuegos en teléfonos móviles.

Ángulos RPY

Tanto en el caso anterior como en este, los giros se realizan comparándolos con sus equivalentes en los ejes X, Y, Z. En la ilustración de la figura 13.9, se ejemplifican los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada con sus términos en inglés: “Roll”, “Pitch” y “Yaw” que otorgan el nombre a los ángulos de este apartado y cuyo empleo es de terminología náutica.



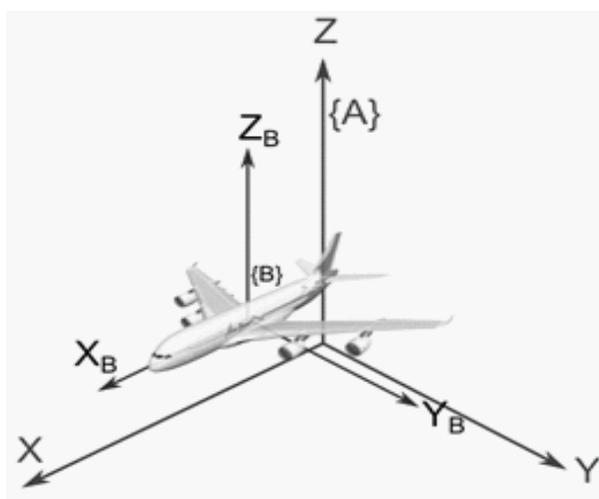
Figura 13.9. Rotaciones de un objeto en el espacio



Ángulos de Euler Z-Y-X

A diferencia de los casos anteriores, los giros se realizan con respecto al sistema de referencia {B} asociado al objeto (avión). La figura 13.10 presenta al avión, cuyo sistema {B} coincide con el de referencia {A}.

Figura 13.10. Sistema de rotación – Ángulos ZYX



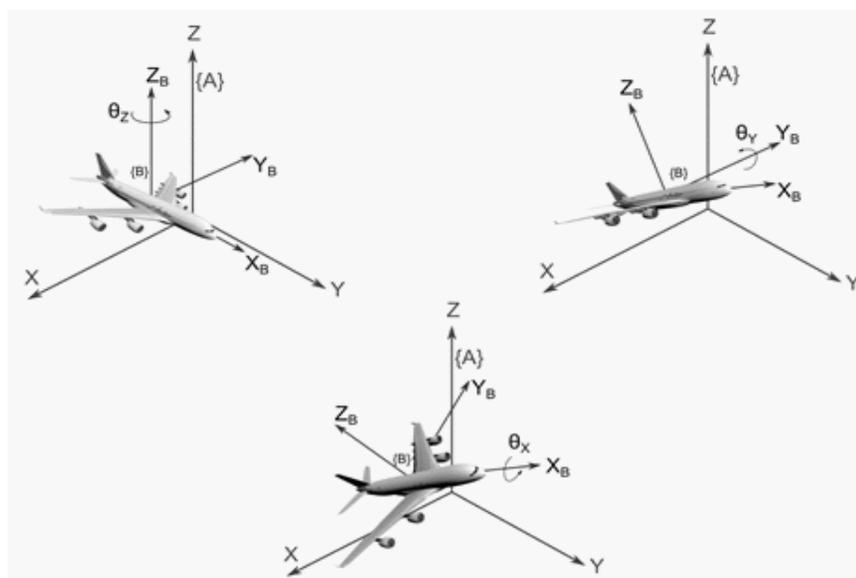
El primer giro, como su nombre lo indica, se realizará en torno al eje Z_B del sistema {B}. En el ejemplo se ha rotado $\theta_Y = 90^\circ$ en el sentido positivo según la regla de la mano derecha (figura 13.10).



El segundo giro se realiza en torno a Y_B ; en el ejemplo se ha rotado un ángulo $\theta_Y = 30^\circ$; y finalmente en el tercer giro se realiza sobre el eje X un ángulo $\theta_X = 45^\circ$.

Del ejemplo se determina que los ángulos ZYX de Euler serán: $(90^\circ, 30^\circ, 45^\circ)$ (figura 13.11).

Figura 13.11. Sistema de rotación – Ángulos ZYX



Las rotaciones realizadas respecto del origen $\{A\}$ son:

$${}^A R_B = {}^A R_{B'} * {}^{B'} R_{B''} * {}^{B''} R_B \quad (13.1)$$

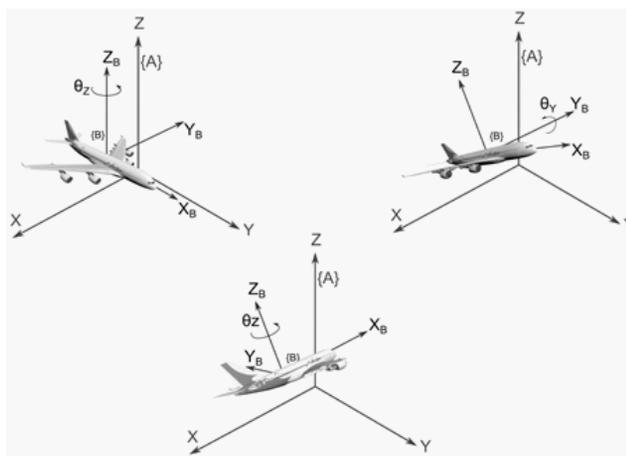
A menudo y en muchas notaciones se conoce a los ángulos de rotación de Euler respecto de cada eje como: α (eje Z), β (eje Y), γ (eje X).

La siguiente corresponde a la matriz de rotación para los ángulos de Euler ZYX, y es importante describirla para usos posteriores.

$${}^A R_{ZYX} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\gamma & \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\gamma \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta & \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma & \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta \cdot \sin\gamma & \cos\beta \cdot \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (13.2)$$



Figura 13.12. Sistema de rotación ángulos de Euler



De forma análoga a los ángulos anteriores, las rotaciones XYZ se realizan de forma secuencial y respecto del sistema de referencia asociado al avión.

En el ejemplo de la figura las dos primeras rotaciones no han variado. Sin embargo, la última rotación se repite para el ángulo Z, que ha rotado debido a movimientos anteriores (figura 13.12).

En el caso del ejemplo, los ángulos XYZ serán: $(90^\circ, 30^\circ, 90^\circ)$

La expresión matricial que determina la rotación de los ángulos de Euler XYZ respecto del origen {A} será:

$${}^A_B R_{ZYX} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\gamma & -\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha \cdot \cos\gamma & \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta \\ \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \text{sen}\gamma & -\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \text{sen}\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma & \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \\ -\text{sen}\beta \cdot \cos\gamma & \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

En esta expresión, los ángulos respecto de los ejes de rotación serán:

$$\alpha \text{ (eje Z), } \beta \text{ (eje Y), } \gamma \text{ (eje Z)}$$



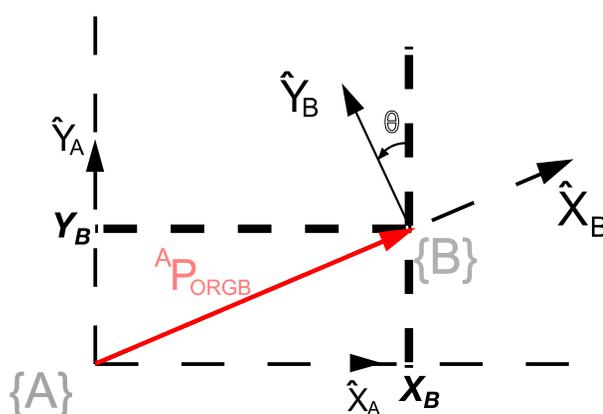
Posición y orientación de un objeto en el espacio

Una vez descritas las múltiples representaciones de posición y orientación de los objetos en el plano y espacio, se emplearán en el desarrollo de esta temática, para la posición, el sistema coordenado tridimensional y para la orientación el sistema de ángulos XYZ.

Se explican a continuación fundamentos de la posición de un sistema coordenado respecto de otro, en vista de que los vehículos y sistemas de navegación poseen un sistema propio o incorporado, que a menudo se mueve respecto de otro relativamente fijo.

Se denominará sistema de referencia {B} al sistema asociado al objeto que se moverá, mientras que un sistema {A} corresponderá a un sistema de referencia estático. Para comprender la rotación del sistema de referencia {B} respecto del {A}, se observará la figura 13.13. Sobre las direcciones X y Y, se han colocado vectores unitarios \hat{X}_A, \hat{Y}_A indicando sus sentidos positivos. El nuevo sistema de referencia {B} se ubica en la posición definida por ${}^A P_{ORGB}$. Se colocan además los unitarios en los ejes del nuevo sistema {B}.

Figura 13.13. Traslación de un sistema B respecto de uno A



La posición de {B} respecto de {A} se representará:

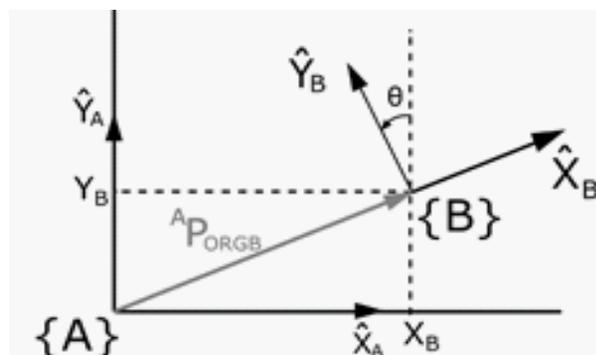
$${}^A P_{ORGB} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

El sistema de referencia B rotará un ángulo θ en torno a su eje Z (figura 13. 14) que apunta hacia el lector. Para representar la rotación y posición del sistema



se empleará notación de vectores y matrices, las mismas que permitirán, a futuro, realizar operaciones para determinar representaciones más complejas y de utilidad.

Figura 13.14. Traslación y rotación de un sistema B respecto de uno A



El origen del sistema {B} no ha variado, en tanto que su rotación será:

$${}^A R_{ORGB} = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

Nótese que las direcciones \hat{X}_B y \hat{Y}_B son afectadas por el ángulo θ , por lo que para hallar sus nuevas direcciones se especificarán las proyecciones que estas poseen sobre los ejes de referencia X y Y del sistema {A} en función del ángulo θ , obteniendo así que:

$${}^A R_{ORGB} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

La expresión anterior se conoce como matriz de rotación. En la primera columna se escribirán las componentes X y Y de la nueva dirección ${}^A \hat{X}_B$ del eje del sistema {B} respecto al sistema {A}. La segunda columna describirá la nueva dirección ${}^A \hat{Y}_B$ del eje Y del sistema {B} respecto del sistema de referencia {A}. Lo anterior quiere decir que r_{11} y r_{21} describirán la orientación del nuevo eje X en {B}, en tanto que r_{12} y r_{22} describirán la orientación del nuevo eje Y en {B}.

En algunas aplicaciones resulta de interés determinar la posición de un punto P respecto del sistema base {A} teniendo su posición respecto del sistema {B}, para lo cual habrán de utilizarse las expresiones siguientes.



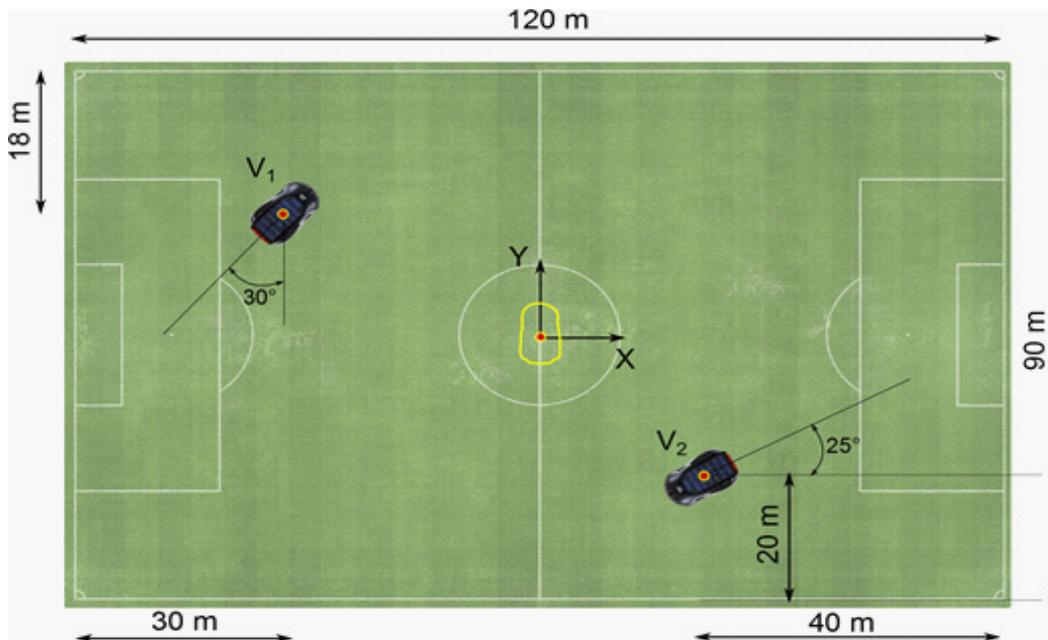
$$\Delta P_X = \Delta P_X + \Delta P_{XORGB} \quad (13.7)$$

$$\Delta P_Y = \Delta P_Y + \Delta P_{YORGB} \quad (13.8)$$

Ejemplo 51:

Una podadora automática controlada por ordenador (figura 13.15) se encuentra en una cancha de fútbol. Inicialmente, el vehículo está en el centro de la cancha. Se moverá hasta la posición V_1 y luego a V_2 . El *software* de control requiere estas posiciones y orientaciones para ubicar al robot y realizar tareas posteriores.

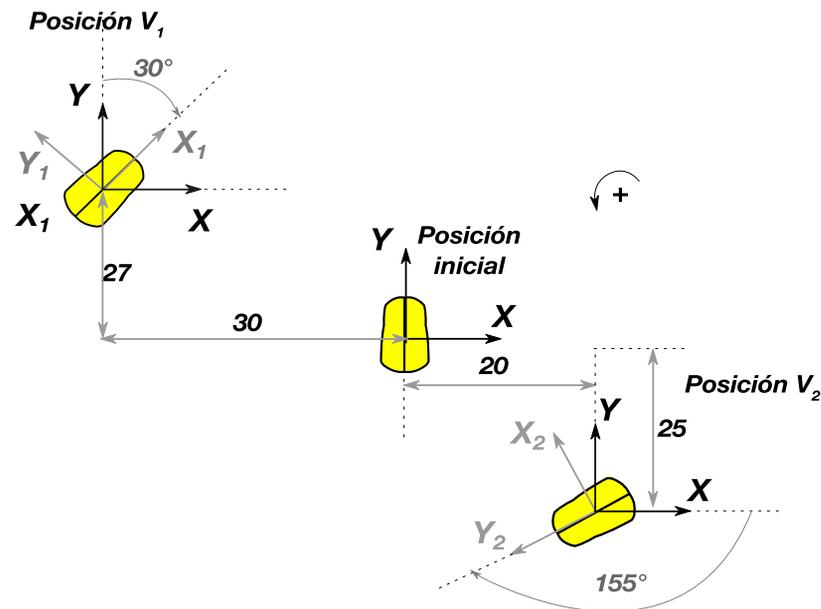
Figura 13.15. Ejemplo de posición y rotación en el plano



El origen de referencia se encuentra asociado al centro de la cancha. Por tanto, la posición y rotación para V_1 respecto del origen X y Y será:



Figura 13.16. Posiciones y orientaciones (ejemplo)



$$\text{Posición de } V_1 = \begin{pmatrix} -30 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotación de } V_1: \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\text{sen}(-30^\circ) \\ \text{sen}(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(330^\circ) & -\text{sen}(330^\circ) \\ \text{sen}(330^\circ) & \cos(330^\circ) \end{bmatrix}$$

Se han respetado los sentidos de los ejes de referencia para la distancia negativa, así como el sentido de rotación antihorario como positivo.

La posición V_2 tendrá la posición y rotación:

$$\text{Posición de } V_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotación de } V_2: \begin{bmatrix} \cos(-155^\circ) & -\text{sen}(-155^\circ) \\ \text{sen}(-155^\circ) & \cos(-155^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(205^\circ) & -\text{sen}(205^\circ) \\ \text{sen}(205^\circ) & \cos(205^\circ) \end{bmatrix}$$



Rotación en el espacio

En apartados anteriores se abordó la rotación de un objeto en el plano. En este literal, se extienden los criterios anteriores a la determinación de la rotación de un objeto en el espacio.

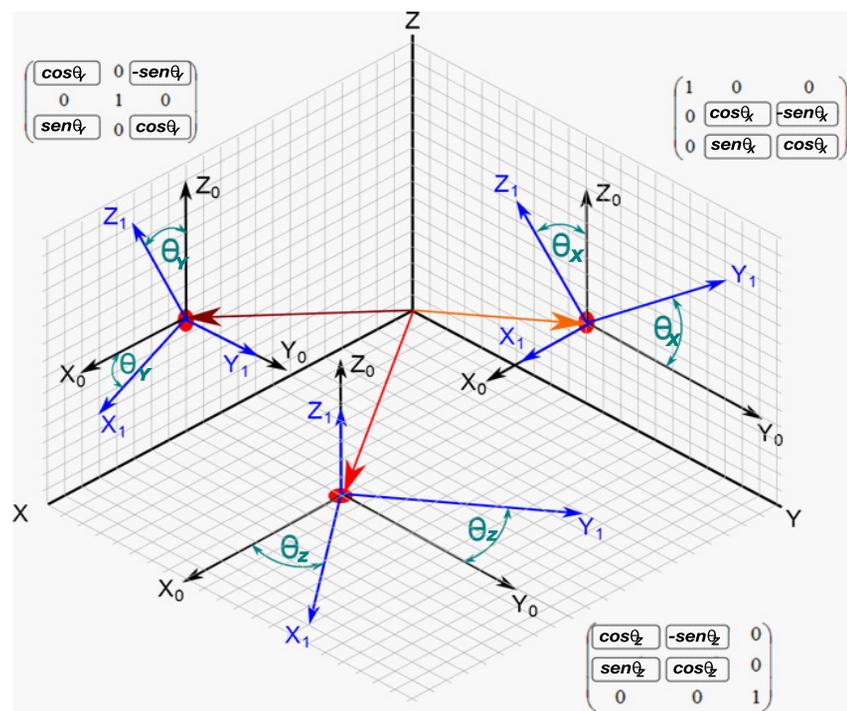
Dados los tres ejes X, Y, Z que delimitan el espacio euclídeo, sobre cada uno de estos se podrá rotar un objeto y se obtendrán las rotaciones Rx, Ry y Rz.

Si un objeto no posee rotación en ningún eje, se representará mediante la siguiente matriz identidad:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La figura 13.17 será de utilidad para comprender el origen de las matrices de rotación empleadas para determinar la posición y rotación en el espacio.

Figura 13.17. Matrices de rotación en el plano





En la figura anterior se observan los ejes de referencia X_0, Y_0, Z_0 , proyectados en los planos XY, XZ, YZ . Se han colocado los ejes que rotan X_1, Y_1, Z_1 . En cada plano se ha rotado el sistema de referencia con ejes de subíndices 1, mediante los ángulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. Las direcciones de las nuevas componentes cambiarán de dirección para generar las matrices de rotación descritas en la figura anterior.

$$\text{Rotación en torno a eje Z: } \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\text{sen}\theta_z & 0 \\ \text{sen}\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

$$\text{Rotación en torno al eje Y: } \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\text{sen}\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

$$\text{Rotación en torno al eje X: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\text{sen}\theta_x \\ 0 & \text{sen}\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

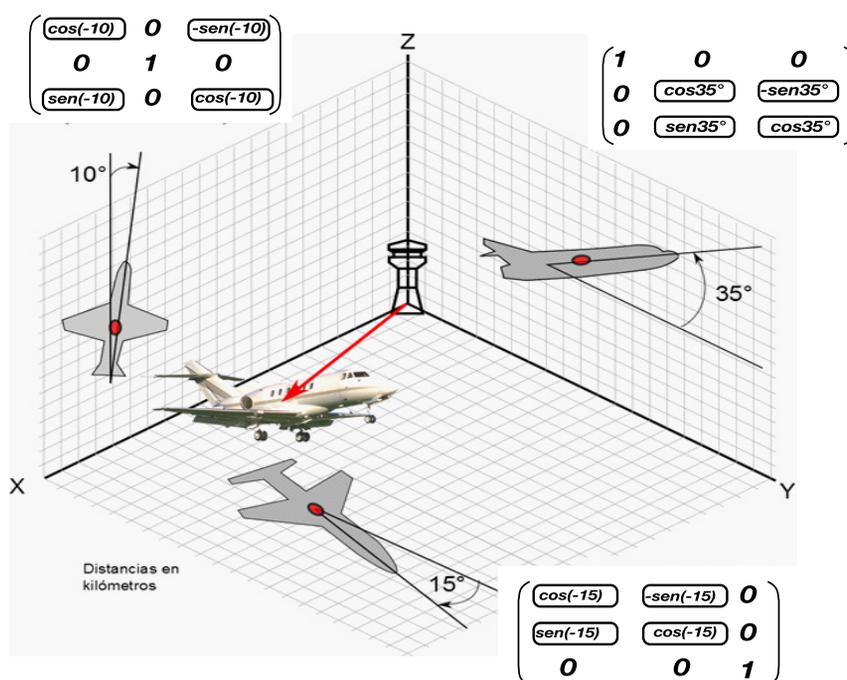
Para emplear de forma adecuada estas rotaciones, bastará con identificar el ángulo que ha rotado un objeto en el espacio y reemplazar en la matriz adecuada.

Ejemplo 52:

El avión de la figura se ubica en el espacio y ha girado en cada uno de los ejes los ángulos especificados, según la instrumentación del sistema de control de la aeronave. Escribe las matrices de rotación y la posición del avión.



Figura 13.18. Ejemplo de matrices de rotación en el plano



Hay en la figura 13.18 un punto interno de la nave que representa su centro de masa y ayuda para determinar la posición del avión según la rejilla de cada plano. Mediante esta referencia y sabiendo que cada división representa 1 km, entonces la posición de la aeronave respecto de la torre de control será:

$$P_{\text{avión}} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Rotación en torno a eje Z:

$$\begin{bmatrix} \cos(-15^\circ) & -\text{sen}(-15^\circ) & 0 \\ \text{sen}(-15^\circ) & \cos(-15^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación en torno al eje Y:

$$\begin{bmatrix} \cos(-10^\circ) & 0 & -\text{sen}(-10^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-10^\circ) & 0 & \cos(-10^\circ) \end{bmatrix}$$

Rotación en torno al eje X:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 35^\circ & -\text{sen} 35^\circ \\ 0 & \text{sen} 35^\circ & \cos 35^\circ \end{bmatrix}$$



Una vez halladas las matrices del problema planteado, se han obtenido tres matrices de rotación y un vector de posición. La multiplicación de las tres matrices de rotación dará finalmente la matriz de rotación total para el avión, empleada en la obtención de la matriz de transformación abordada a continuación.

Matriz de transformación

Una matriz de transformación ${}^A T_B$ toma la forma:

$${}^A T_B = \begin{pmatrix} {}^A R_B & {}^A Pos_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^A X_B \\ 0 & 1 & 0 & {}^A Y_B \\ 0 & 0 & 1 & {}^A Z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

En donde ${}^A R_B$ representa la matriz de rotación de tres filas y tres columnas de dimensión, halladas del producto de las rotaciones de un objeto.

${}^A Pos_B$ es un vector formado por las posiciones X, Y, Z en las que se encuentra un objeto con su sistema de referencia B respecto de un sistema A.

Los ceros y el valor uno en la última fila de la matriz son términos triviales que componen la matriz para darle dimensiones 4 x 4 y facilitar las operaciones de transformación.

Ejemplo 53:

Escribe la matriz de transformación ${}^A T_B$, ${}^A T_C$ y ${}^B T_C$ para las posiciones del avión de la figura del ejemplo 52.

Del ejercicio correspondiente, se obtuvieron la posición y las rotaciones en cada eje. Para obtener la matriz de transformación requerida se deberá obtener ${}^A R_B$.

Se debe partir del producto de las rotaciones en los ejes y ${}^A Pos_B$, cuyo vector describe la posición en el espacio del avión {B} respecto de la torre de control {A}.

$${}^A R_B = R_X \cdot R_Y \cdot R_Z$$



Dado que el producto de matrices solo se define para dos matrices, es válido asociarlas y multiplicarla por la tercera. Por tanto,

$$R_X \cdot R_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 35^\circ & -\text{sen } 35^\circ \\ 0 & \text{sen } 35^\circ & \cos 35^\circ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(-10^\circ) & 0 & -\text{sen}(-10^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-10^\circ) & 0 & \cos(-10^\circ) \end{bmatrix}$$

$$R_X \cdot R_Y = \begin{bmatrix} \cos(-10^\circ) & 0 & -\text{sen}(-10^\circ) \\ -\text{sen } 35^\circ \cdot \text{sen}(-10^\circ) & \cos 35^\circ & -\text{sen } 35^\circ \cdot \cos(-10^\circ) \\ \cos 35^\circ \cdot \text{sen}(-10^\circ) & \text{sen } 35^\circ & \cos 35^\circ \cdot \cos(-10^\circ) \end{bmatrix}$$

$$R_Z : \begin{bmatrix} \cos(-15^\circ) & -\text{sen}(-15^\circ) & 0 \\ \text{sen}(-15^\circ) & \cos(-15^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y : \begin{bmatrix} \cos(-10^\circ) & 0 & -\text{sen}(-10^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-10^\circ) & 0 & \cos(-10^\circ) \end{bmatrix}$$

$$R_X : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 35^\circ & -\text{sen } 35^\circ \\ 0 & \text{sen } 35^\circ & \cos 35^\circ \end{bmatrix}$$

$${}^A_B R = R_X \cdot R_Y \cdot R_Z = \begin{bmatrix} 0,9408 & -0,245 & 0,17 \\ -0,1119 & 0,8114 & -0,5586 \\ -0,2763 & 0,5123 & 0,8036 \end{bmatrix}$$

En tanto que la posición será:

$${}^A P_{os_B} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Al reemplazar estas expresiones como componentes de la matriz de transformación, se tendrá:

$${}^A T_B = \begin{pmatrix} {}^A R_B & {}^A POS_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9408 & -0,245 & 0,17 & 15 \\ -0,1119 & 0,8114 & -0,5586 & 10 \\ -0,2763 & 0,5123 & -0,8036 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

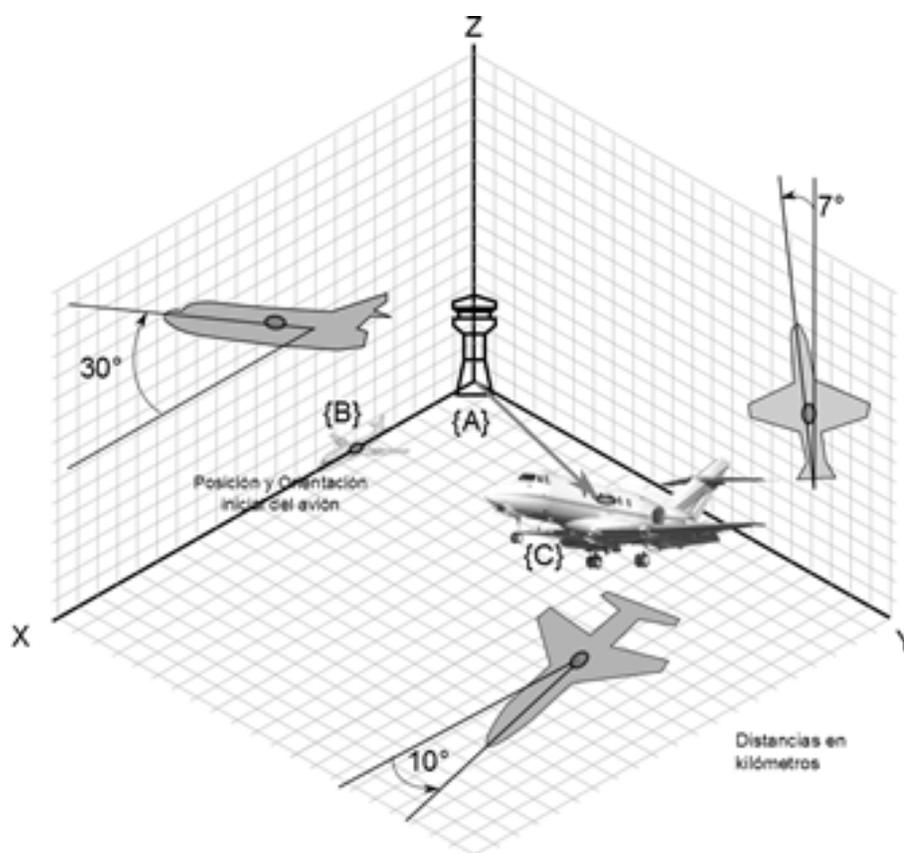


Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Escribe la matriz de transformación ${}^A T_B$, ${}^A T_C$ y ${}^B T_C$ para las posiciones del avión de la figura 13.19 (las divisiones de la cuadrícula son en kilómetros).

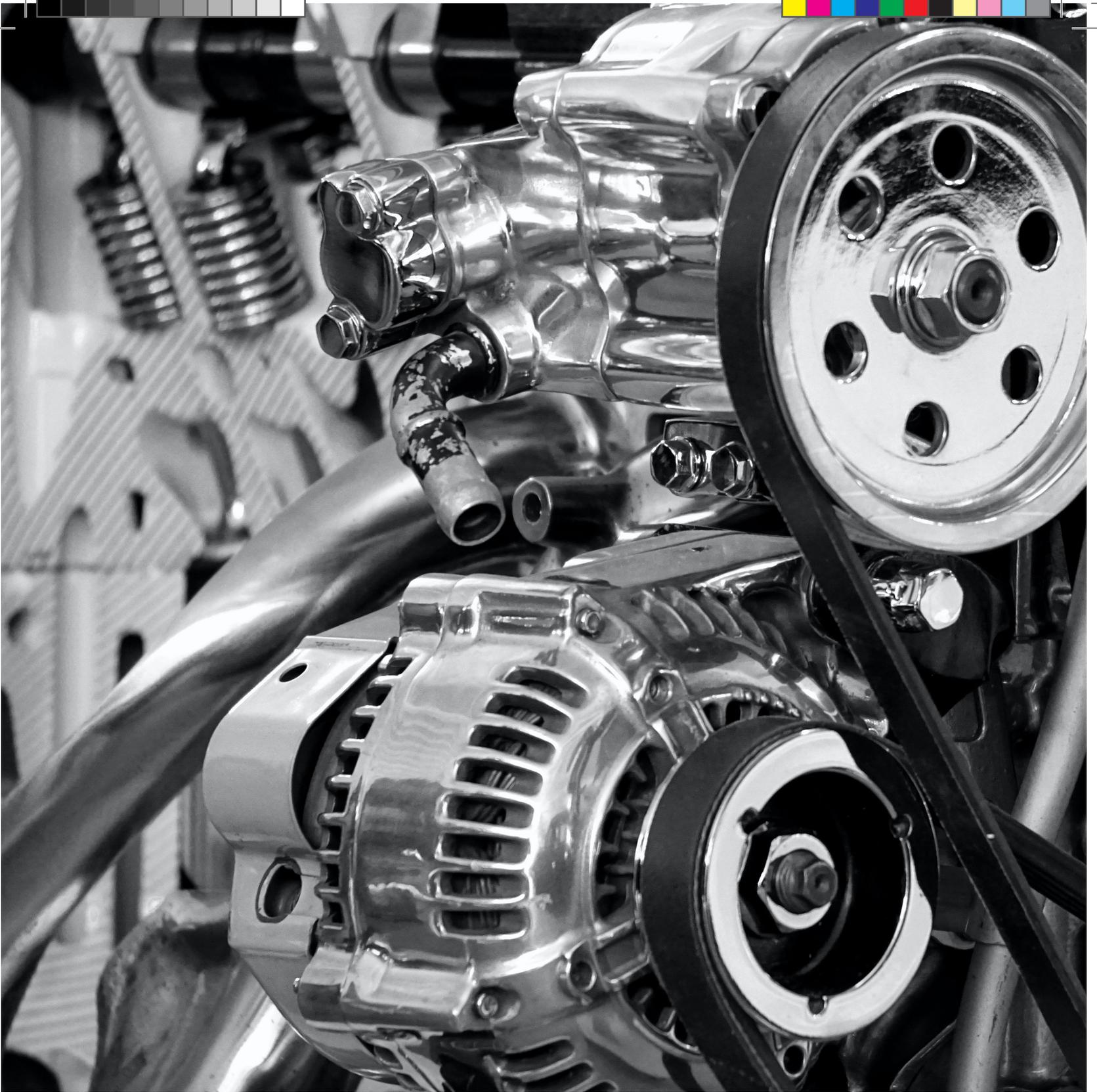
Figura 13.19. Gráfico del ejercicio



Nombre:

.....

Calificación:



14

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Aprenderemos sobre sistemas equivalentes de fuerza
- ▶ Resolveremos ejercicios

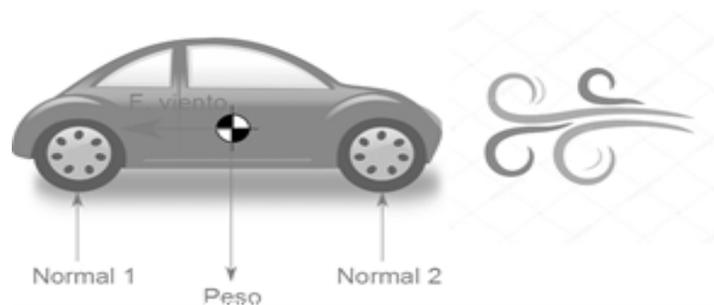


Capítulo 14

Sistemas equivalentes de fuerza

La aplicación de fuerzas concurrentes permite un análisis de gran utilidad en muchas situaciones. Sin embargo, al tratarse de un cuerpo sólido rígido, este puede poseer multitud de puntos en donde la fuerza actúa. Por ello se han elegido puntos como el centro de gravedad para representar la acción de fuerzas como el peso. La fuerza normal de un auto se ubica en los puntos de contacto de las llantas, pero puede representarse como una fuerza en el centro de gravedad en casos sencillos (figura 14.1). Las fuerzas del viento y lluvia que actúan en un auto también suelen trasladarse al centro de masa sin tomar en cuenta cómo inciden en la superficie del vehículo. La variedad de fuerzas actuantes (figura 14.2) y los puntos pueden dificultar el análisis. Por ello, es pertinente considerar criterios de sistemas de equivalentes de fuerzas que nos permiten cambiar convenientemente la posición de las fuerzas o acciones efectuadas a fin de generar casos más sencillos e intuitivos de resolver.

Figura 14.1. Diferentes fuerzas aplicadas en un objeto





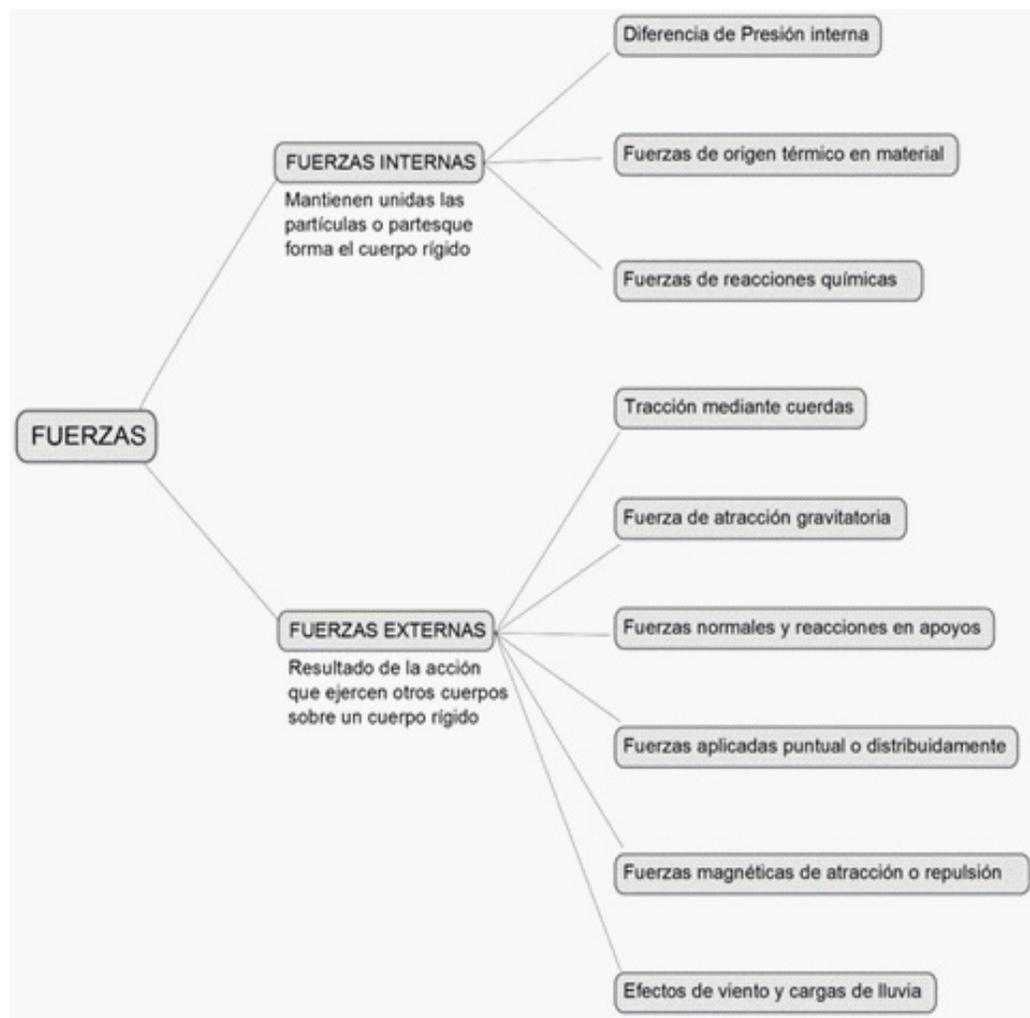
El conjunto de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a todo tipo de fuerza, una de carácter interno y otras externas. Para considerarlas en futuros análisis se describen las de mayor incidencia.

Las fuerzas internas son originadas por la interacción de partículas o átomos que forman parte de un mismo cuerpo o sistema, mientras que una fuerza externa es generada debido a la interacción de una partícula con otra de otro cuerpo o sistema.

Las fuerzas por diferencia de presión interna son las que tienden a hinchar un globo de helio o mantienen extendido el caucho de las llantas en vehículos. Así se logran mantener prácticamente rígidas ante la carga del peso del vehículo.

Las fuerzas de origen térmico en materiales son las responsables de efectos de deformación.

Figura 14.2. Clasificación de las fuerzas

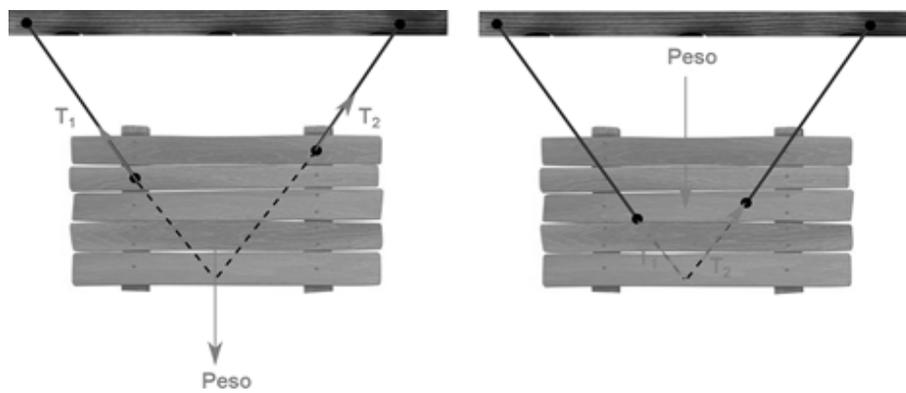




Principio de transmisibilidad

De modo experimental, se ha determinado que una fuerza puede remplazarse por otra equivalente que tenga la misma dirección y sentido siempre y cuando esta actúe a lo largo de la misma línea de acción, sin que esta cambie el efecto que realiza sobre el sólido rígido. Estas dos fuerzas se denominarán equivalentes (figura 14.3).

Figura 14.3. Ejemplo de principio de transmisibilidad



La figura 14.4 presenta un ejemplo del principio de transmisibilidad. El gráfico izquierdo presenta las fuerzas de tensión de las cuerdas en dos puntos de anclaje superiores; el gráfico derecho, en puntos de anclaje más bajos, pero en la misma línea de acción. Por tanto, las tensiones del derecho son equivalentes a las tensiones del izquierdo. El peso del auto en la misma figura puede representarse en varios lugares de la línea vertical de acción, como se puede ver en ambas figuras. Así también logran ser equivalentes.

Figura 14.4. Ejemplo de transmisibilidad de una fuerza



Un ejemplo más intuitivo es el efecto de la fuerza de una persona al empujar un vehículo, la misma que puede ser perfectamente reemplazada por una fuerza de tensión por la tracción de una cuerda desde el lado opuesto al vehículo, siendo estas dos fuerzas equivalentes.



Momento de una fuerza respecto a un punto

Considere una fuerza F aplicada en un punto A de la rueda (figura 14.5). En este caso, se considerará la posición A mediante un vector de posición r respecto del centro de giro de la rueda.

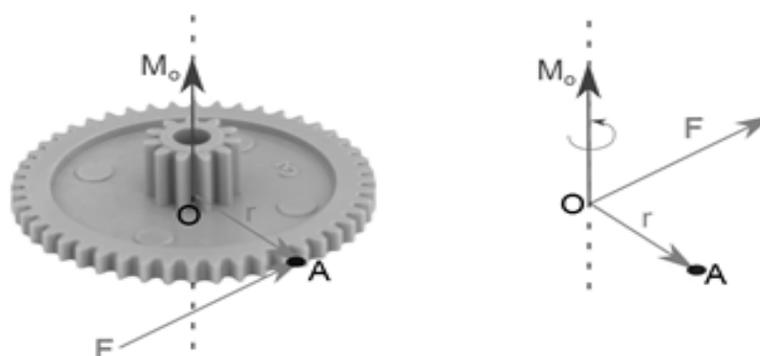
El momento de F respecto de O se define como el producto vectorial de r y F mediante la siguiente ecuación:

$$M_o = \vec{r} \times \vec{F} \quad (14.1)$$

$$M_o = rF \cdot \text{sen } \theta = Fd \quad (14.2)$$

Dado que el ángulo en un punto tangencial de la circunferencia exterior forma 90° con la dirección del vector r , entonces la función seno de un ángulo recto valdrá 1 y se simplificará la expresión convenientemente.

Figura 14.5. Momento de una fuerza respecto a un punto



Como se puede deducir claramente, la fuerza F tenderá a rotar el sólido rígido en torno al punto O en sentido antihorario. Dado que la fuerza normalmente se emplea en newtons (N), al multiplicarse con una posición en metros, se tendrá que las unidades del momento serán $N \cdot m$ (newton por metro).

Si la fuerza no formara convenientemente un ángulo recto, entonces se buscará una distancia perpendicular a esa fuerza mediante la cual se podrá validar el cálculo.

Si la fuerza no formara un ángulo recto, entonces se buscará una distancia perpendicular a esa fuerza mediante la cual se podrá validar el momento realizado.



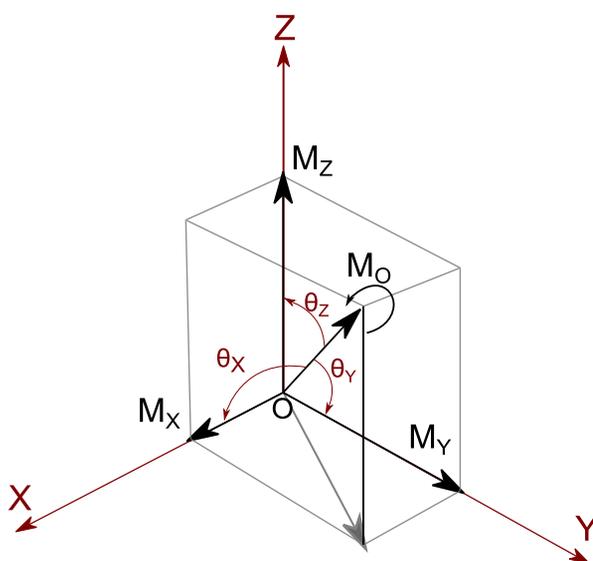
A menudo, los momentos también, al igual que los vectores, se analizan en cada eje (figura 14.6). Por ello, se aclara que el momento en cada eje se obtendrá de las expresiones:

$$M_x = M_o \cdot \cos \theta_x \quad (14.3)$$

$$M_y = M_o \cdot \cos \theta_y \quad (14.4)$$

$$M_z = M_o \cdot \cos \theta_z \quad (14.5)$$

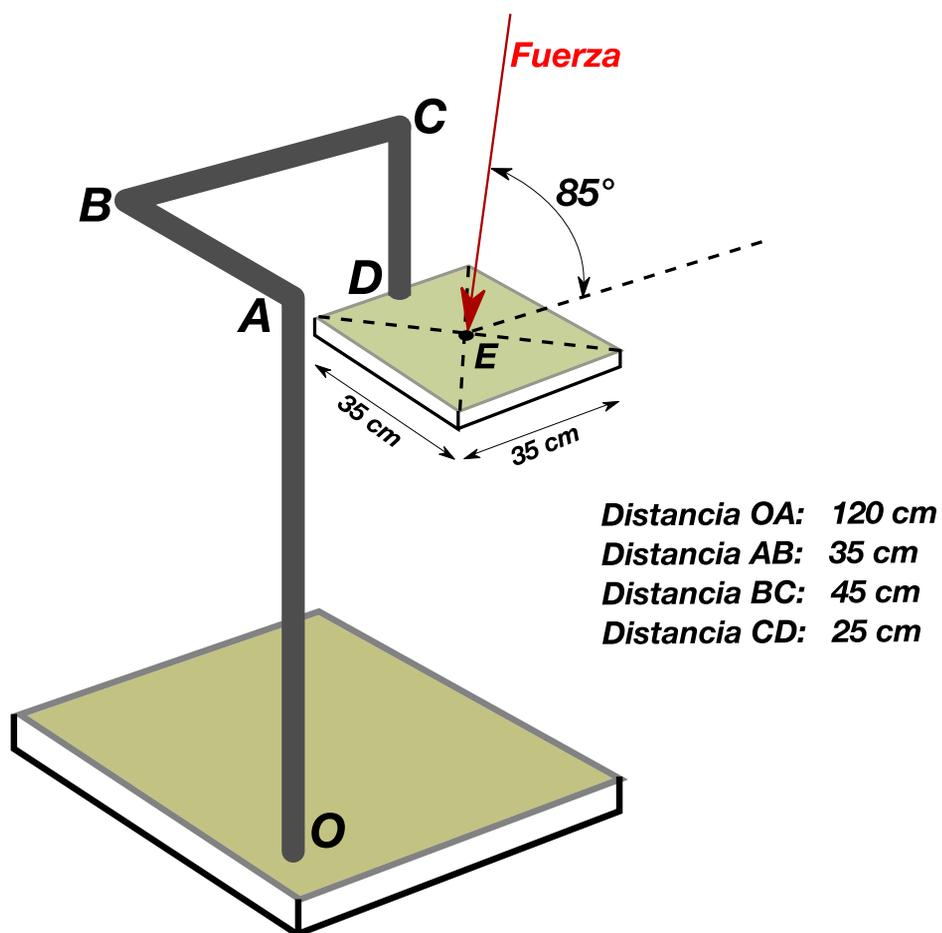
Figura 14.6. Proyección del momento en los ejes cartesianos



En las ecuaciones planteadas, M_x , M_y , M_z son los momentos correspondientes a cada eje (figura 14.7), en tanto que θ_x , θ_y , θ_z son los cosenos directores que dan información de la dirección al vector unitario de M_o .



Figura 14.7. Base para truco del “levitador”



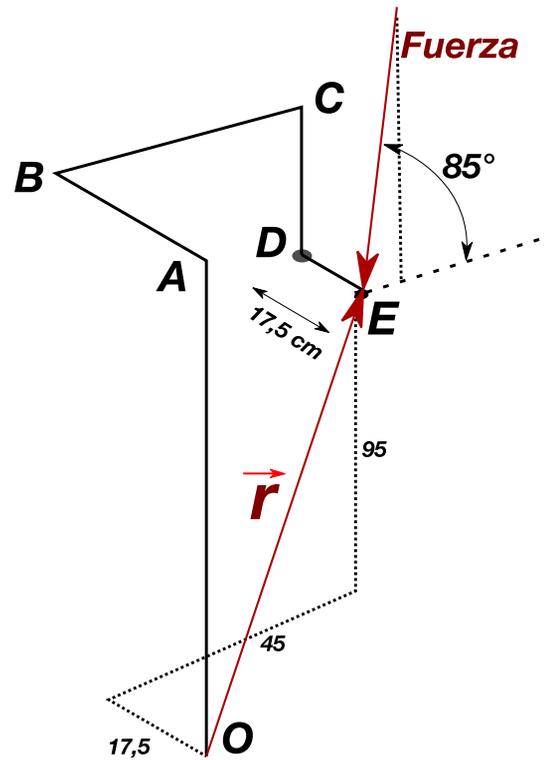
Ejemplo 55:

Los magos callejeros poseen un viejo truco de levitación que consiste en una base similar a la figura 14.8. Se sientan en el punto E, en donde se concentra la carga aplicada de su peso. El resto de la estructura es tapada con un manto y la mano del “levitador” sujeta la estructura en el punto A. Así se hace creer que es un simple bastón AO. La estructura es sujeta firmemente a la base en el punto O a fin de evitar el vuelco de la estructura.

Se desea obtener el valor del momento en el punto O a fin de realizar un posterior diseño con otros materiales. Obtén el momento debido a la fuerza con respecto al punto O, si se sabe que el peso del mago es de 55 kgf.



Figura 14.8. Fuerzas en base de truco del “levitador”



$$M_O = \vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$\vec{r} = -17,5 \vec{i} + 45 \vec{j} + 95 \vec{k}$$

$$\text{Fuerza} = 55 \text{ kg}$$

$$\vec{F} = 0 \vec{i} - (55 \cdot \cos 85^\circ) \vec{j} - (55 \cdot \sin 85^\circ) \vec{k}$$

$$\vec{F} = 0 \vec{i} - 4,8 \vec{j} - 54,8 \vec{k}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -17,5 & 45 & 95 \\ 0 & -48 & -54,8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 95 \\ -48 & -54,8 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -17,5 & 95 \\ 0 & -54,8 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -17,5 & 45 \\ 0 & -48 \end{vmatrix}$$

$$M_O = (-2466 + 4560) \vec{i} - (959 - 0) \vec{j} + (840 - 0) \vec{k}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 2094 \vec{i} - 959 \vec{j} - 840 \vec{k}$$

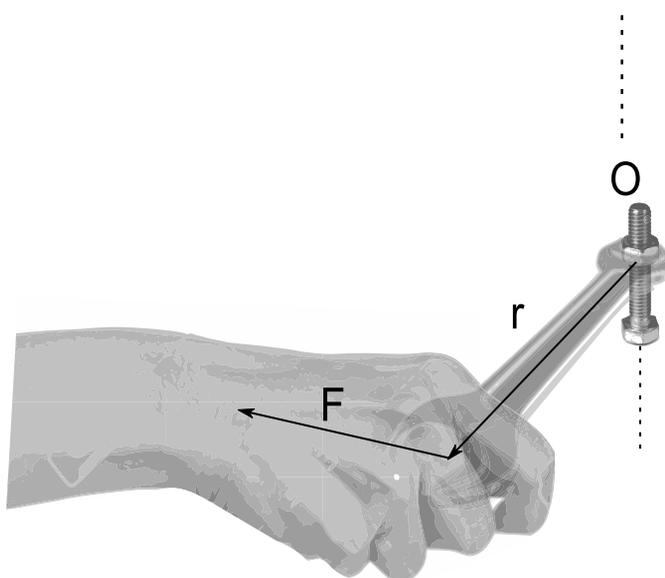
El momento obtenido M_O , por definición, tendrá dirección perpendicular al plano formado y pasará por el punto O.



Momento de una fuerza respecto de un eje

A menudo la determinación del momento considera el eje de rotación del elemento de estudio. Por ejemplo, en la figura 14.9, el momento que realiza la mano a través de llave de tuerca se alinearán con el eje de rotación de la tuerca en sentido vertical.

Figura 14.9. Momento de una fuerza respecto de un eje

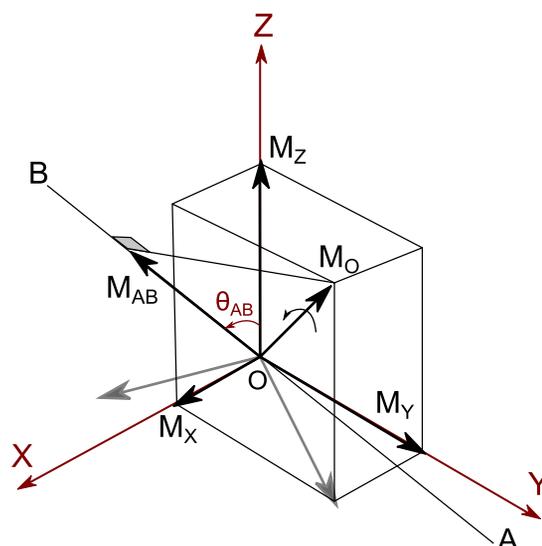


La figura 14.10 ilustra el caso en que el momento generado se proyecta sobre un eje AB que no coincide con los ejes principales. Para proyectar el momento M_O y obtener M_{AB} deberá gráficamente formarse un triángulo rectángulo mediante una línea perpendicular que parte del extremo de M_O hasta el eje AB. Se subtendrá el ángulo θ_{AB} para que permita la determinación de M_{AB} .

$$M_{AB} = M_O \cdot \cos\theta_{AB}$$



Figura 14.10. Proyección de un momento en un sentido especificado



Teorema de Varignon

Este teorema enuncia que: «Dadas varias fuerzas concurrentes, el momento resultante de las distintas fuerzas es igual al momento de la resultante de ellas, aplicada en el punto de concurrencia».

En la actualidad, este enunciado podría presentarse algo obvio dado el uso de vectores. Sin embargo, en la antigüedad, resultó de suma importancia, ya que el concepto de vector aún no se utilizaba. Este teorema, enunciado por primera vez por el matemático neerlandés Simón Stevin (siglo XVII), toma su forma actual gracias al matemático Pierre Varignon (1654-1722).

La expresión para el momento resultante será:

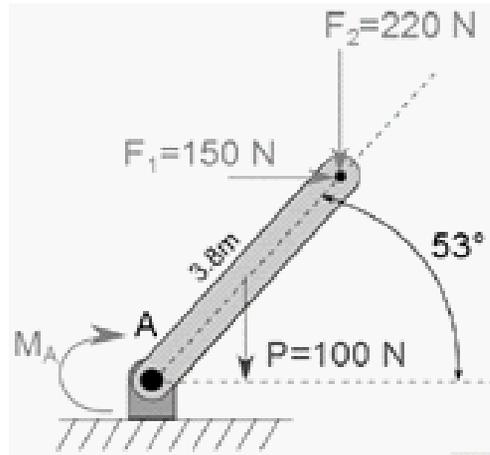
$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OP} \times \vec{F}_i = \vec{OP} \times \left(\sum_i \vec{F}_i \right) = \vec{OP} \times \vec{F} \quad (14.6)$$

En esta ecuación, el punto O corresponde al origen y P, al extremo de la posición donde se ejecuta la fuerza. F representa las fuerzas aplicadas.

Para ilustrar este teorema se empleará la figura 14.11. En la misma, existe una barra articulada en el punto A (origen). Se aplican las fuerzas F_1 , F_2 y P debido al peso de la viga fija a la articulación en A.

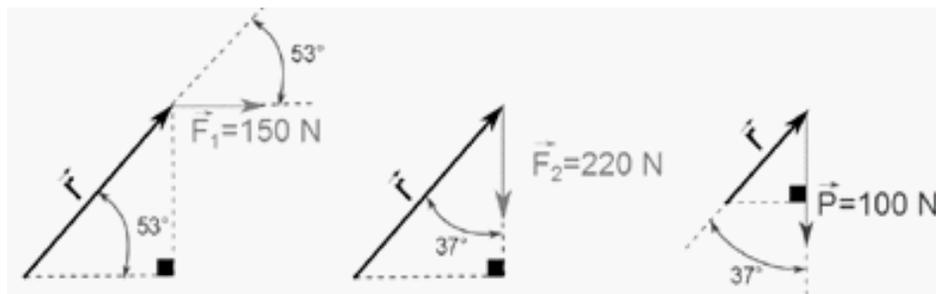


Figura 14.11. Teorema de Varignon (ejemplo)



Dado que $M_T = M_1 + M_2 + M_p$:

Figura 14.12. Fuerzas para teorema de Varignon (ejemplo)



La anterior figura ilustra de forma más clara las fuerzas y los ángulos en las que estas actúan. Cabe resaltar que la distancia perpendicular desde A hasta los puntos de aplicación de cada fuerza en función del ángulo respectivo será:

$$r_{F1} = 3,8 \cdot \text{sen } 53^\circ$$

$$r_{F2} = 3,8 \cdot \text{sen } 37^\circ$$

$$r_p = 1,9 \cdot \text{sen } 37^\circ$$



De donde los momentos serán:

$$M_1 = F_1 \cdot r_{F1} \cdot \text{sen } 53^\circ = -150 \cdot 3,8 \cdot \text{sen } 53^\circ$$

$$M_2 = F_2 \cdot r_{F2} \cdot \text{sen } 37^\circ = -220 \cdot 3,8 \cdot \text{sen } 37^\circ$$

$$M_p = P \cdot r_p \cdot \text{sen } 37^\circ = -100 \cdot 1,9 \cdot \text{sen } 37^\circ$$

De esta manera, el momento total será $M_T = -1072,74 \text{ Nm}$.

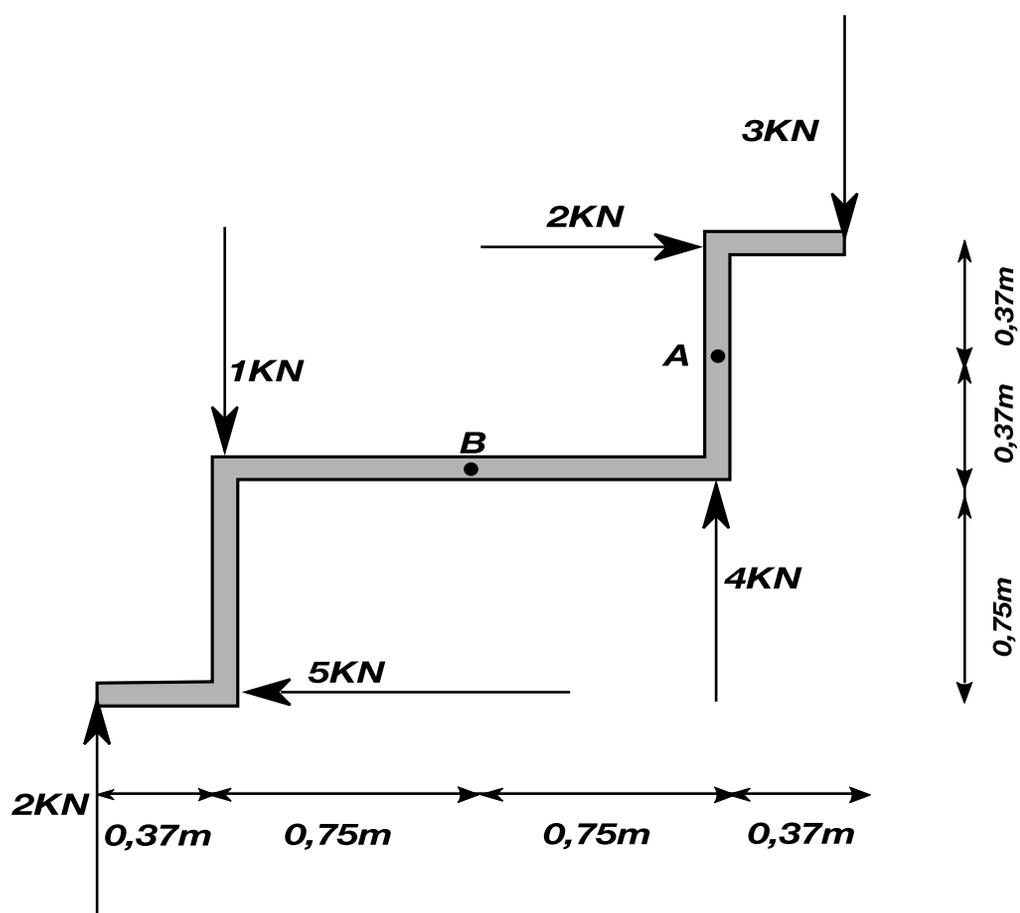
Empleando el teorema de Varignon, el momento determinado puede ser reemplazado por una sola fuerza a una distancia específica y lograr el mismo efecto de estas tres fuerzas del ejemplo.



Ejercicios propuestos

1. Calcular el momento que ejercen las fuerzas representadas en la figura sobre los puntos A y B.

Figura 14.13. Gráfico del ejercicio



Nombre:

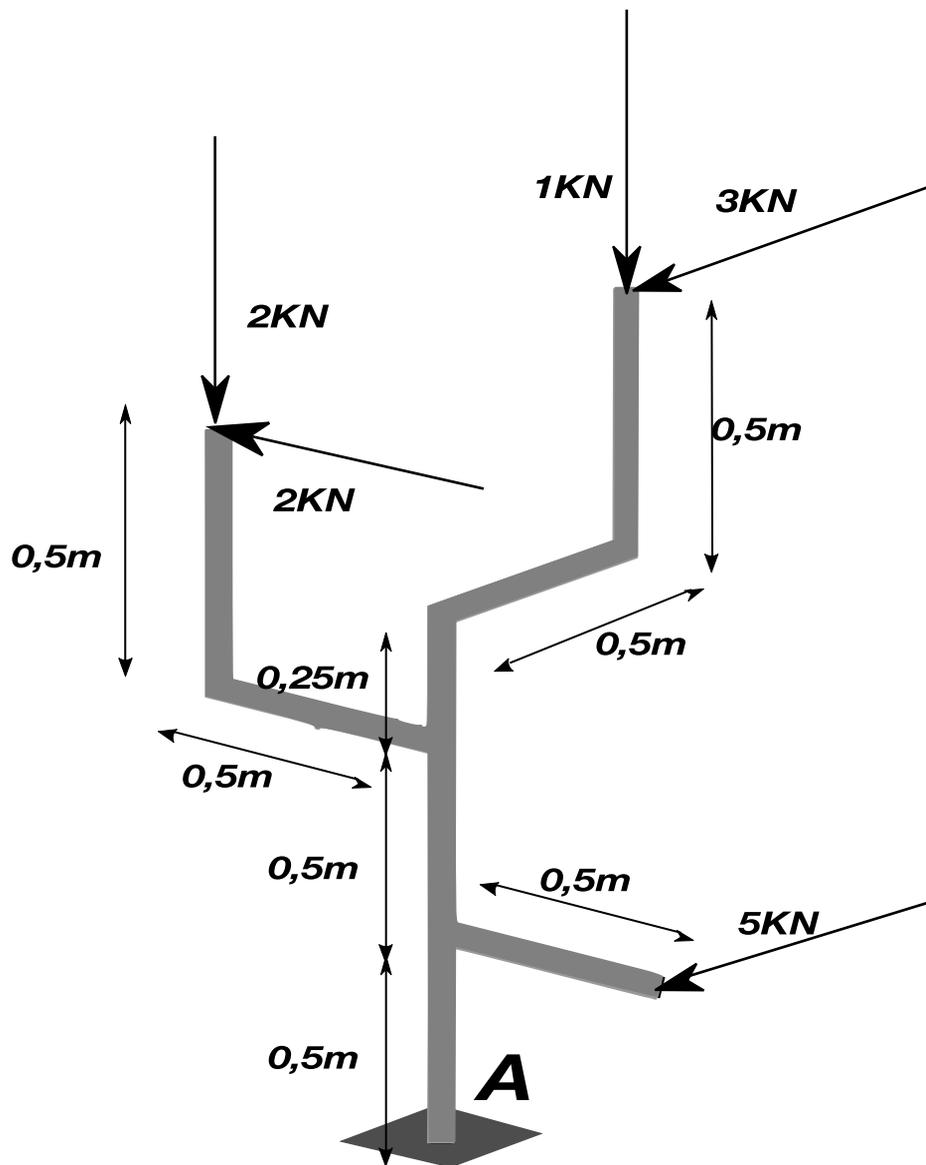
.....

Calificación:



2. Obtén el momento que ejercen las fuerzas de la figura sobre el punto A.

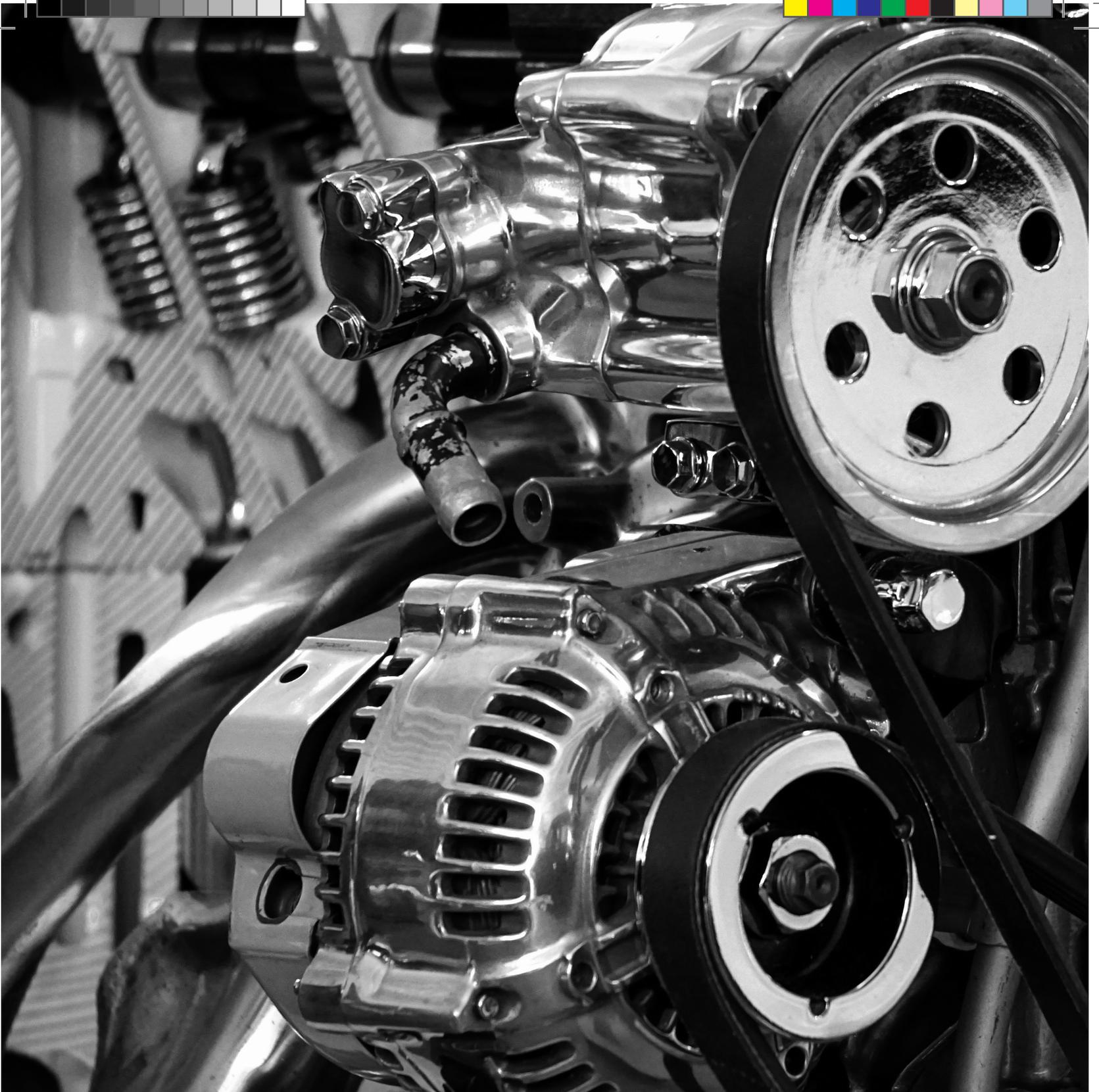
Figura 14.14. Gráfico del ejercicio



Nombre:

.....

Calificación:



15

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Aprenderemos sobre los cuerpos rígidos
- ▶ Aprenderemos sobre la estática
- ▶ Resolveremos ejercicios



Capítulo 15

Equilibrio de cuerpos rígidos

El equilibrio en partículas usaba como criterios base las sumatoria de fuerzas en cada uno de los ejes para justificar el estado de reposo de la partícula. Sin embargo, el cuerpo rígido también es susceptible del punto de aplicación de las mismas en vista del momento que genera. Por esta razón, los criterios que justifican el equilibrio son los siguientes:

$$\Sigma F = 0 \quad \Sigma M_O = \Sigma(r \times F) = 0 \quad (15.1)$$

Dado que la fuerza y el momento se descompondrán en análisis posteriores en los ejes principales X, Y y Z, se tiene que:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (15.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (15.3)$$

Un cuerpo rígido por tanto estará equilibrado cuando exista un balance de fuerzas y momentos en todos sus ejes.



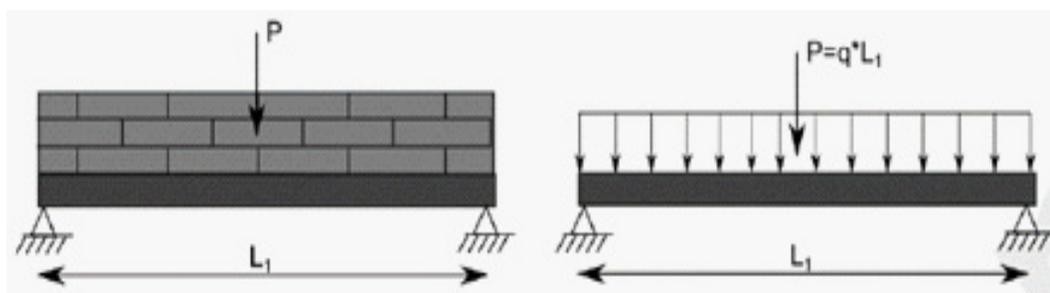
Distribuidas

En múltiples casos de la estática, se emplean cargas distribuidas. Los más comunes son aquellos en que la carga está uniformemente distribuida. En vista de ello y antes del análisis de equilibrio, se abordan de forma breve.

Cargas distribuidas en elementos horizontales

A menudo las vigas horizontales en edificaciones soportan cargas de muros, losas, balcones y otras situaciones de carga uniforme, como se ilustra en la figura.

Figura 15.1. Carga uniforme en viga



La carga en estos casos puede representarse de dos formas diferentes. La primera, como una carga P ubicada en el centro de la viga de longitud L_1 (figura izquierda) o como una carga distribuida graficada con una serie de flechas a lo largo de la viga y en el mismo sentido de la fuerza P (figura derecha).

Estas cargas podrán convertirse de manera adecuada para el análisis mediante la expresión:

$$q = \frac{P}{L_1} \quad (15.4)$$

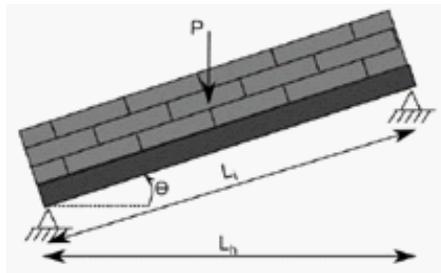
En donde q es la carga distribuida por unidad de longitud, cuyas unidades serán kg/m para el SI.



Cargas distribuidas en elementos inclinados

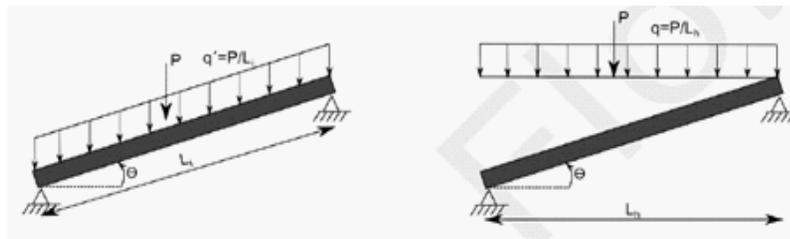
Cuando el elemento no es horizontal, las cargas uniformes se pueden considerar de dos maneras de acuerdo con sus dimensiones.

Figura 15.2. Carga uniforme en viga inclinada



La figura 15.2 presenta una viga inclinada un ángulo θ respecto de la línea horizontal. La fuerza uniformemente distribuida la ejerce un muro cuyo valor de carga deberá variar debido al ángulo. Este sistema posee dos dimensiones: L_i que representan la longitud inclinada de la viga, L_h que será la longitud horizontal de la misma (figura 15.3).

Figura 15.3. Carga en función de L_h o L_i



Considerando la figura, se denominará a las cargas:

q : carga distribuida con respecto a la longitud horizontal

q' : carga distribuida con respecto a la longitud inclinada

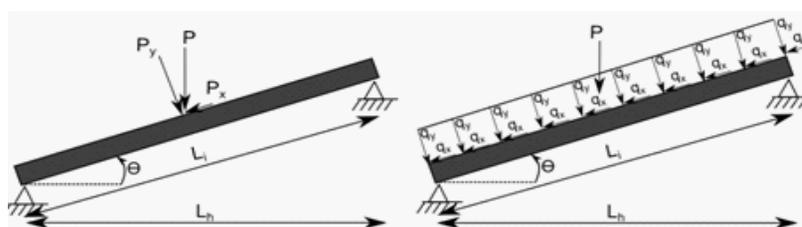
Se emplearán las siguientes relaciones para intercambiar de forma útil los términos.



$$q' = \frac{P}{L_i} \qquad q = \frac{P}{L_h} \qquad (15.5)$$

Se ha de considerar que las cargas uniformes, por tener un ángulo de inclinación, tendrán componentes que actúan de forma longitudinal y transversal al eje longitudinal de la viga (figura 15.4).

Figura 15.4. Componentes de una carga uniforme en viga inclinada



Considerando el eje X a lo largo de la viga y el eje Y perpendicular, la fuerza P poseerá componentes P_x , P_y , y q generará componentes q_x , q_y .

Las componentes mencionadas se pueden determinar mediante las siguientes expresiones.

$$P_x = P \cdot \text{sen } \theta \qquad (15.6) \qquad P_y = P \cdot \text{cos } \theta \qquad (15.2)$$

$$q_x = \frac{P_x}{L_i} = \frac{P \cdot \text{sen } \theta}{L_h / \text{cos } \theta} \qquad (15.3) \qquad q_y = \frac{P}{L_h} \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta \qquad (15.4)$$

$$q_x = \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta \qquad (15.5) \qquad q_y = P \text{cos}^2 \theta \qquad (15.6)$$



Equilibrio en dos dimensiones

El análisis de objetos en el plano reduce el número de variables y por tanto ecuaciones proponiendo casos simples. De las seis ecuaciones planteadas para el caso general, con el empleo de tres bastará para resolver las incógnitas del sistema, siempre y cuando existan tres incógnitas.

Cabe aclarar dos casos importantes que se deben tomar en cuenta antes del análisis estático (tabla 15.1). Existen casos de estructuras estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas y, dependiendo de su naturaleza, el procedimiento de análisis deberá seleccionarse adecuadamente.

Tabla 15.1. Vigas estáticamente determinadas e indeterminadas



Estructuras estáticamente determinadas (isostáticas)

A menudo el problema de estática es resolver o calcular las reacciones en apoyo o calcular fuerzas para alcanzar el equilibrio del sistema.

El número de incógnitas depende del tipo de apoyo, las fuerzas y los momentos que actúan. Se trata de un sistema isostático o estáticamente determinado cuando el número de ecuaciones de la estática son suficientes para calcular esas incógnitas.

El caso de una estructura en el plano de tendrá máximo tres ecuaciones independientes para un máximo de tres incógnitas. Algunos ejemplos de este tipo se presentan en la figura 15.5.



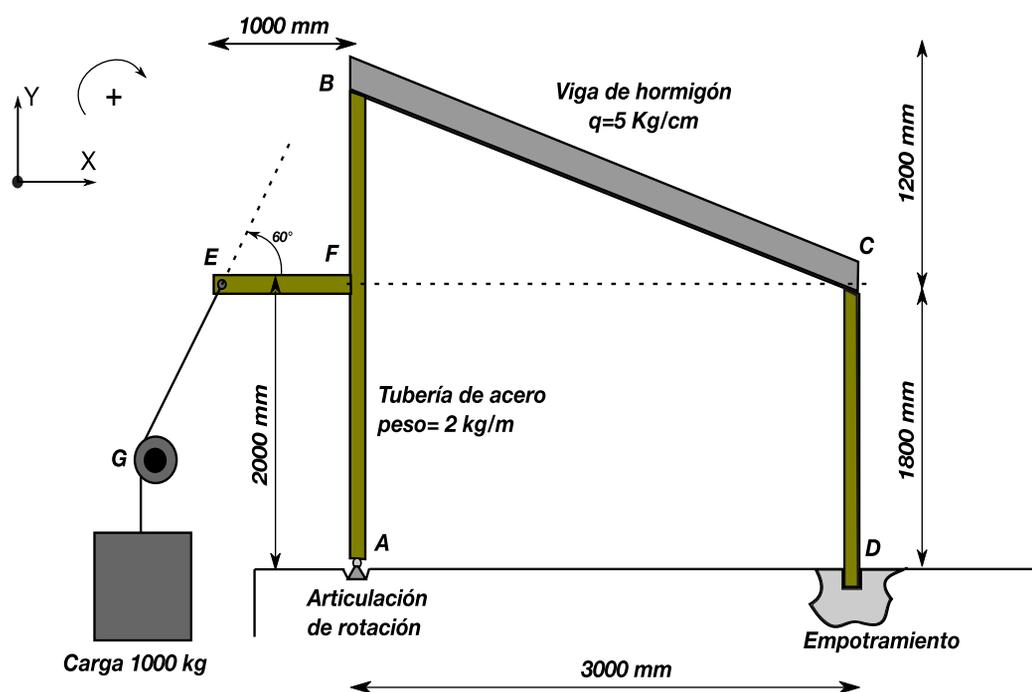
Estructuras estáticamente indeterminadas (hiperestáticas)

Cuando las ecuaciones de la estática no son suficientes para resolver las incógnitas, existen métodos que consideran las reacciones internas, en cuyo caso es relevante el empleo de las características del material, el tamaño y la forma de su sección transversal. En este caso, se trata con sistemas hiperestáticos o estáticamente indeterminados.

Ejemplo 56:

Se presenta el pórtico de la figura 15.5. En el mismo, actúan una serie de fuerzas y cargas distribuidas. El pórtico isostático soporta una carga de 1000 kg en el aire. Posee una viga inclinada BC cuyo peso respecto de su longitud horizontal es de 5 kg/cm. Se despreciará el peso del resto de elementos de la estructura. Determina, según el sistema de referencia X e Y, cuáles son las reacciones en los apoyos A y B.

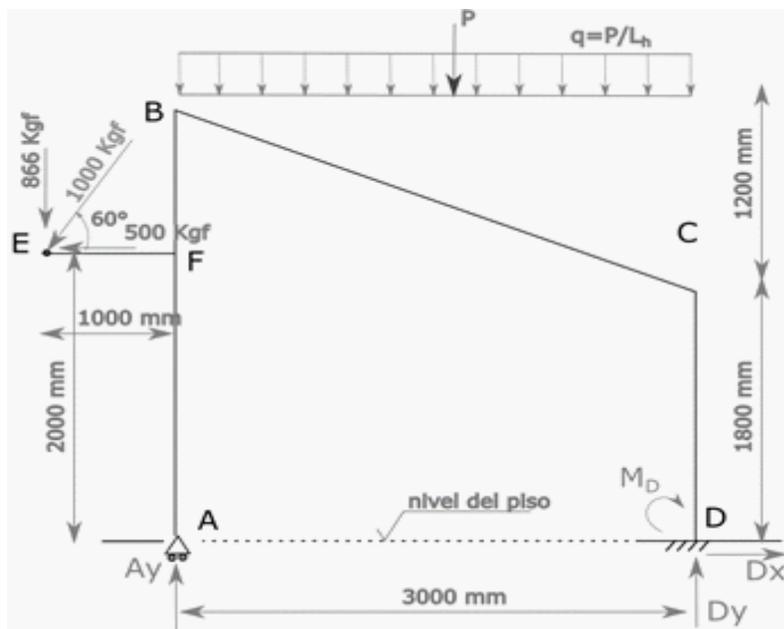
Figura 15.5. Ejemplo para análisis estático





Como primer punto, se puede identificar el tipo de apoyo. En A, existe un apoyo de rodillo que generará una sola reacción A_y vertical e intuitivamente hacia arriba. En B hay un empotramiento caracterizado por dos reacciones: una D_y en dirección vertical y otra D_x en dirección de X. Actuará también en el mismo punto un momento M_D (figura 15.6).

Figura 15.6. Fuerzas para análisis estático (ejemplo)



Las fuerzas que actúan en el sistema a lo largo del eje X son D_x y 500 kgf.

Las fuerzas que actúan en el eje Y son A_y , D_y , 866 kgf y P.

Las fuerzas de 500 kgf y 866 kgf son resultado de la descomposición de la fuerza aplicada en el punto E (1000 kgf), mientras que P se obtiene como equivalente de la carga distribuida q y la longitud horizontal L_H .

Se asumirá el sentido de las reacciones D_y y D_x . Si el sentido elegido arbitrariamente nos genera una reacción positiva, este será el sentido correcto; si no, el contrario.



Las ecuaciones de utilidad para este caso en el plano serán:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - D_y - 866 - P = 0$$

$$A_y + D_y - 866 - 1500 = 0$$

$$A_y + D_y = 2366 \text{ kgf}$$

$$P = q \cdot L_h$$

$$P = 5 \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right) \cdot 300 \text{ (cm)}$$

$$P = 1500 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$- D_x - 500 = 0$$

$$D_x = - 500 \text{ kgf}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$866 (4000) + 500 (2000) - A_y (3000) + 1500 (1500) = 0$$

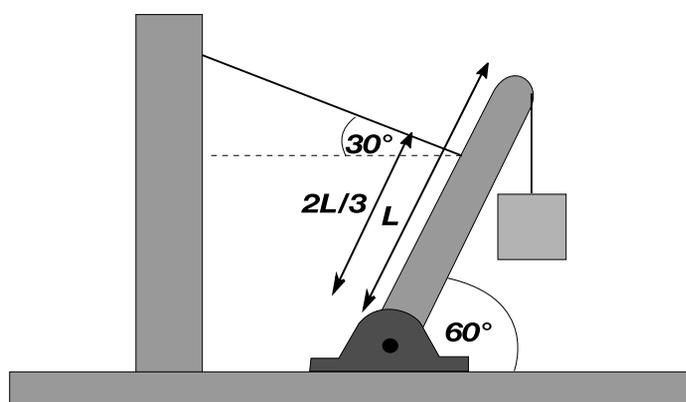
$$A_y = 2238 \text{ kgf}$$



Ejercicios propuestos

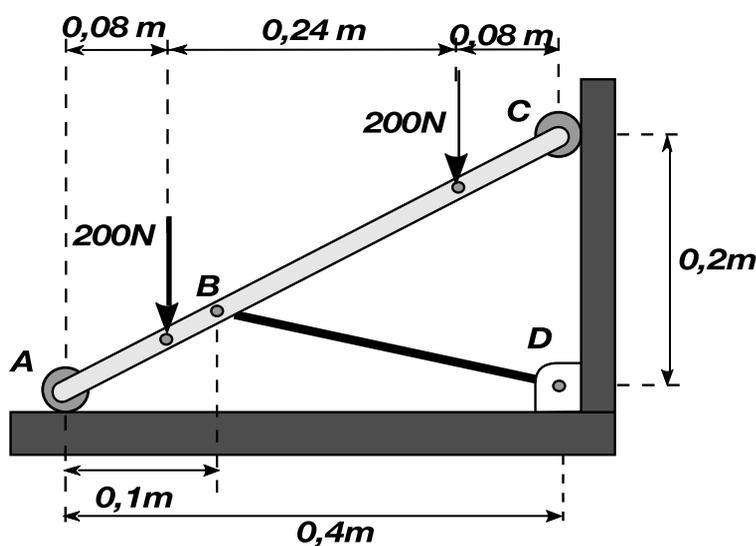
1. Una pluma uniforme de 2 kN está sostenida mediante un cable, como se muestra en la figura 15.7. La pluma está articulada en la parte baja, y un objeto de 3 kN cuelga de su parte superior. Encuentra:
 - a. La tensión en el cable.
 - b. Las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el suelo sobre la pluma.

Figura 15.7. Esquema del ejercicio



2. La barra AC soporta dos cargas de 200 N, como se muestra en la figura 15.8. Los rodillos A y C descansan sobre superficies sin fricción y el cable BD está unido en B. Determina la tensión en el cable BD, y además las reacciones en los puntos A y en C.

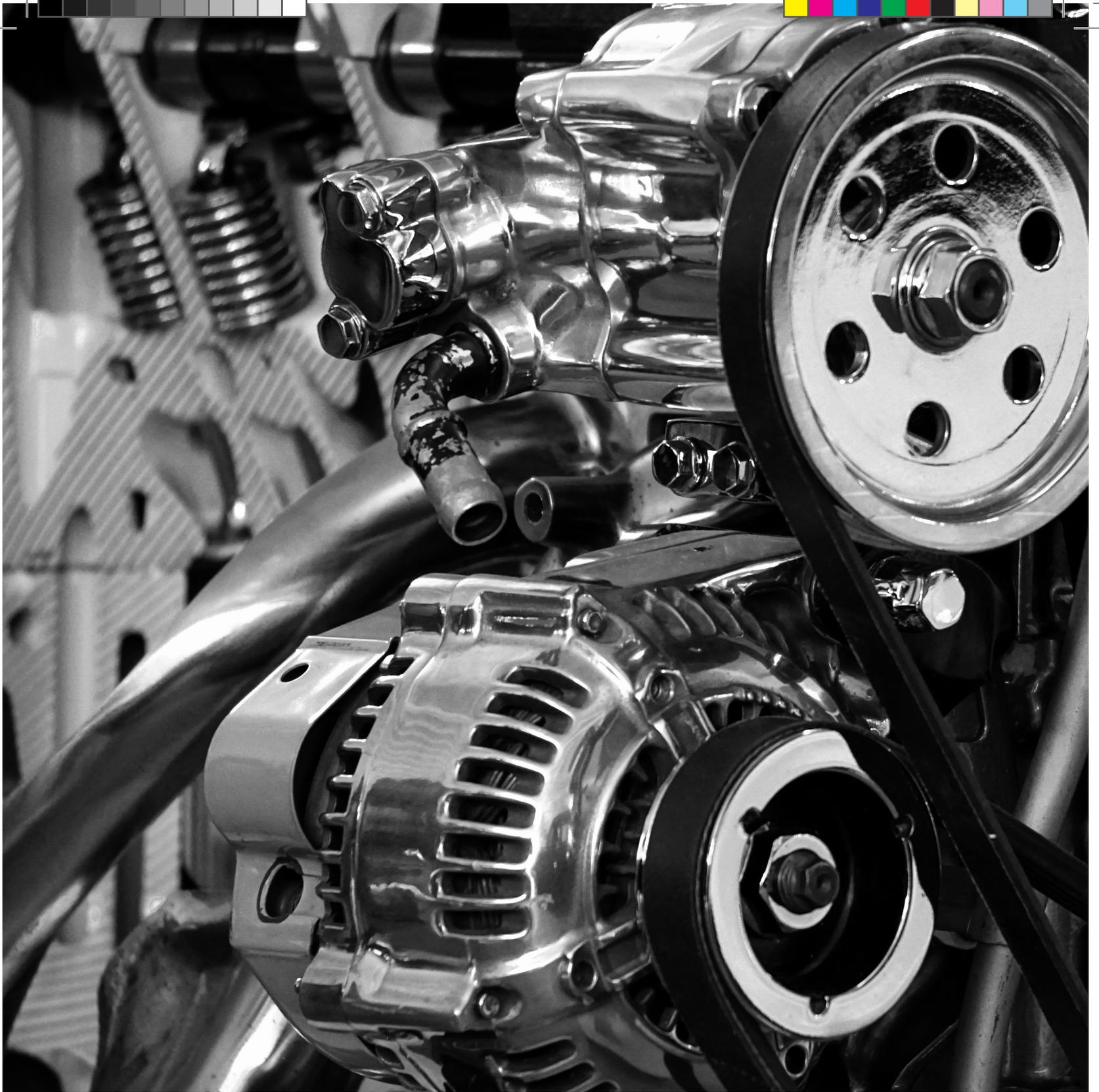
Figura 15.8. Esquema del ejercicio 2



Nombre:

.....

Calificación:



16

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Analizaremos estructuras mecánicas
- ▶ Resolveremos ejercicios mecánicos



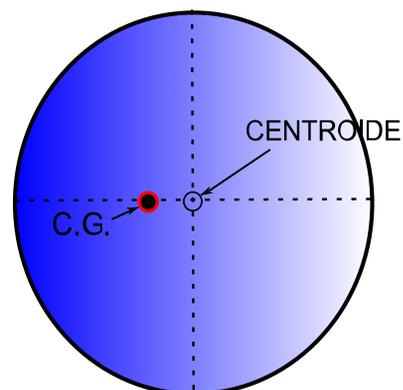
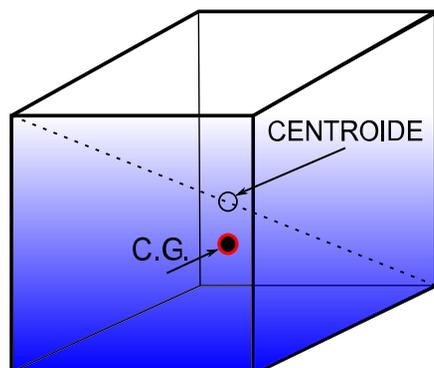
Capítulo 16

Centroides y centros de gravedad

En análisis del comportamiento de los cuerpos es indispensable el empleo y comprensión de los conceptos *centroide* y *centro de gravedad*.

El centroide es una característica geométrica de las formas lineales, planas, superficiales o sólidas que considera la forma en la que se dispone la materia sin importar su composición. Un cubo, por ejemplo, poseerá su centroide en el centro de su diagonal mayor, mientras que una esfera lo tendrá en su punto más interno (figura 16.1).

Figura 16.1. Centroide y centro de gravedad de figuras geométricas





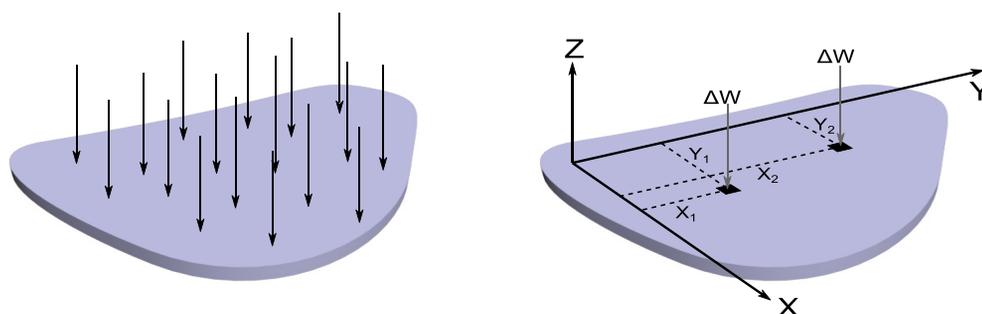
Centro de gravedad es un término de carácter físico que se asocia con la distribución de la masa en un cuerpo. Por tanto, si el mismo cubo del ejemplo anterior tuviera más masa en su base, como lo representa el color gradiente, su centro de gravedad estaría mas bajo que su centroide. En el caso de la esfera, la representación sugiere una concentración de masa en su lado izquierdo, lo que desplazaría su centro de gravedad hacia allá.

Centro de gravedad de cuerpos bidimensionales

Tanto las figuras planas como las líneas se definen en dos dimensiones, ambas con una sucesión de n puntos, cada uno de ellos atraídos por el campo uniforme gravitacional hacia el centro de la Tierra.

$$\sum F_z : W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n \quad (16.1)$$

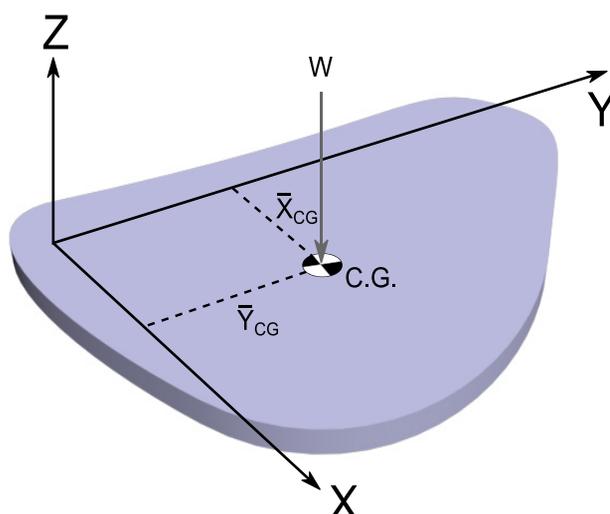
Figura 16.2. Peso de un cuerpo bidimensional



La figura 16.2 propone la descomposición de una superficie plana en n partes en las que actuará un diferencial de fuerza debido a la atracción gravitacional ΔW . En efecto, cada partícula del objeto es atraída al centro de la Tierra. Representar el peso ubicado en el centro de gravedad es una convención que facilita y torna más intuitivo el análisis, como en la figura 16.3.



Figura 16.3. Determinación del centro de gravedad



$$\sum M_x : \quad \bar{x}W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n \quad (16.2)$$

$$\sum M_y : \quad \bar{y}W = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n \quad (16.3)$$

Si se expresan de forma infinitesimal los fragmentos de una superficie o un elemento lineal como un alambre extendidos sobre el plano XY , se tienen las ecuaciones siguientes, mediante las cuales se han de determinar el peso W y las coordenadas del centro de gravedad \bar{x} y \bar{y} (figura 16.4).

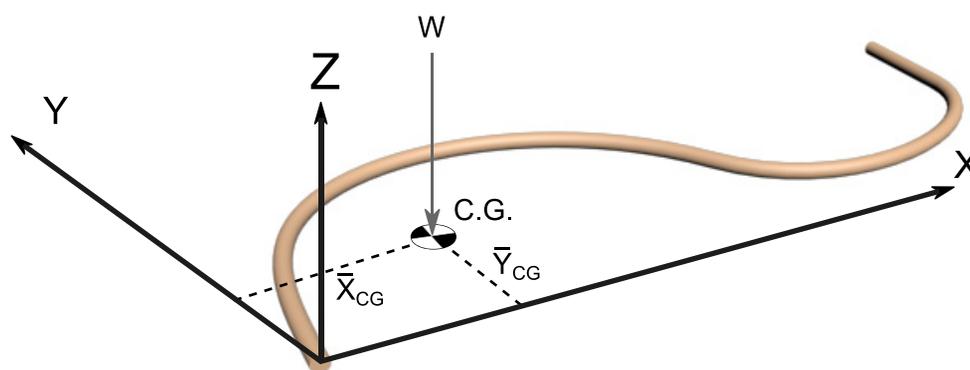
$$W = \int dW \quad (16.4)$$

$$\bar{x}W = \int x \cdot dW \quad (16.5)$$

$$\bar{y}W = \int y \cdot dW \quad (16.6)$$



Figura 16.4. Centro de gravedad en un elemento lineal



Para placas o materiales de sección uniforme y homogénea, el peso de esta se expresará como:

$$\Delta W = \gamma t \cdot \Delta A \quad (16.7)$$

γ es el peso específico (peso por unidad de volumen) de la placa, t corresponde al espesor de la placa y ΔA es el área del elemento de placa.

Dada la expresión anterior, para toda placa homogénea y de sección uniforme A , el peso total W será:

$$W = \gamma t A \quad (16.8)$$

Al sustituir ΔW y W en las ecuaciones de momentos, se obtienen expresiones en función del área.

$$\sum M_x : \quad \bar{y}A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n \quad (16.9)$$

$$\sum M_y : \quad \bar{x}A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n \quad (16.10)$$



Dividiendo el área de forma infinitesimal se definen las expresiones para determinar la posición en función del área.

$$\bar{x}A = \int x \cdot dA \quad (16.11)$$

$$\bar{y}A = \int y \cdot dA \quad (16.12)$$

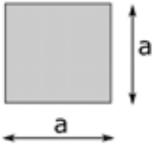
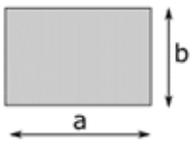
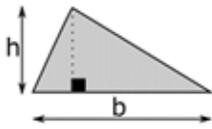
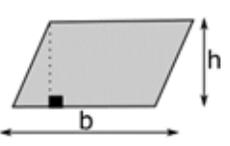
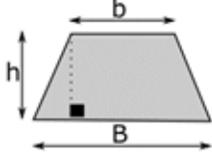
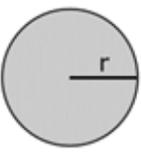
Finalmente ha de definirse la posición del centro de gravedad para un elemento longitudinal como una cuerda o un alambre de sección transversal constante y homogéneo en su composición.

$$\bar{x}L = \int x \cdot dL \quad (16.13)$$

$$\bar{y}L = \int y \cdot dL \quad (16.14)$$

Las expresiones anteriores sirven siempre y cuando se conozca de forma perfecta la función matemática que debe integrarse a fin de lograr hallar las coordenadas. Es práctico para la mayoría de casos de este documento el empleo de un formulario de referencia. Siempre que se requiera, el lector podrá consultar la tabla 16.1, que le guiará en la obtención del área y la posición del centro de gravedad.

Tabla 16.1. Área en secciones planas

<p>Cuadrado $A=a \cdot a=a^2$</p> 	<p>Rectángulo $A=a \cdot b$</p> 
<p>Triángulo $A=\frac{b \cdot h}{2}$</p> 	<p>Paralelogramo $A=b \cdot h$</p> 
<p>Trapezio $A=\frac{B+b}{2} \cdot h$</p> 	<p>Círculo $A=\pi \cdot r^2$</p> 



Centro de gravedad en superficies planas y alambres compuestos

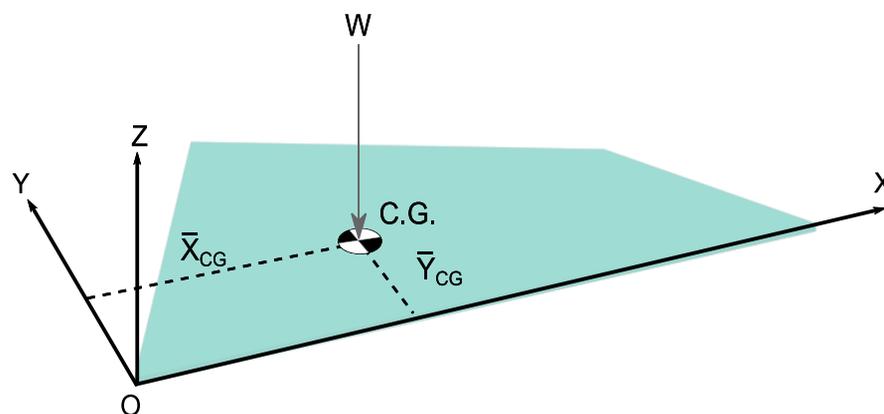
Tabla 16.2. Momentos de inercia en secciones planas

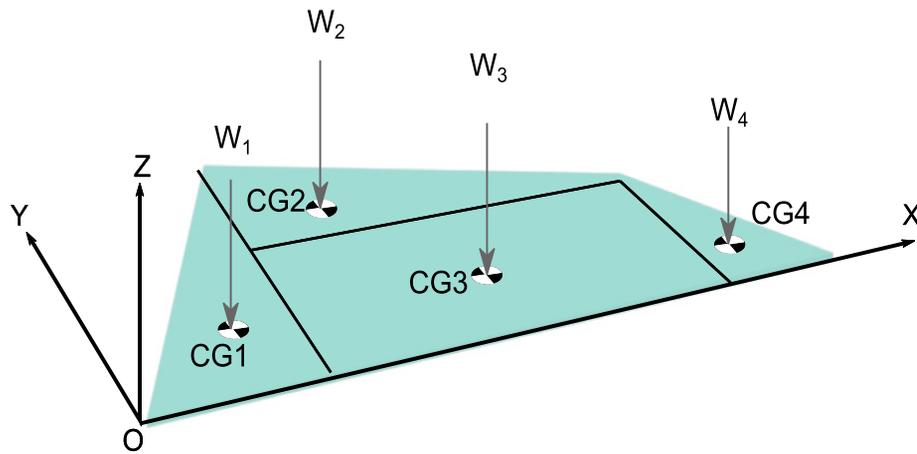
<p>Rectángulo</p> <p> $I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $I_{x''} = \frac{1}{3}bh^3$ $I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_{y''} = \frac{1}{3}bh^3$ $J_c = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$ </p>	<p>Semicírculo</p> <p> $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_o = \frac{1}{4}\pi r^4$ </p>
<p>Triángulo</p> <p> $I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_{x''} = \frac{1}{12}bh^3$ </p>	<p>Cuarto de círculo</p> <p> $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_o = \frac{1}{8}\pi r^4$ </p>
<p>Círculo</p> <p> $I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_o = \frac{1}{2}\pi r^4$ </p>	<p>Elipse</p> <p> $I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $I_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_o = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$ </p>

Para múltiples aplicaciones de ingeniería y mecánica, la obtención del centro de gravedad (tabla 16.2) puede resultar aún más extenso si se trata de regiones planas irregulares o ensambladas con partes, como puede ser el caso de vigas compuestas por múltiples perfiles de acero.

En este apartado se estudiará este caso partiendo de la figura 16.5, que representa una figura compuesta, ya que no se trata de una figura simple sino de la unión de cuadrados y triángulos.

Figura 16.5. Área de sección compuesta



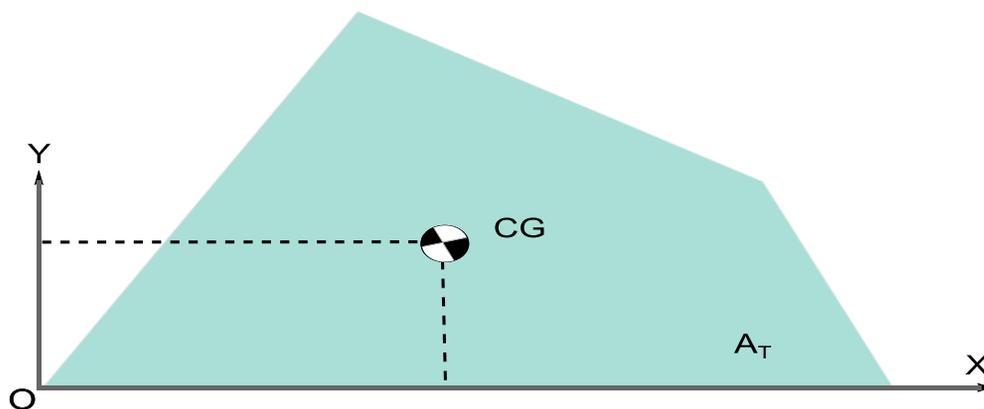


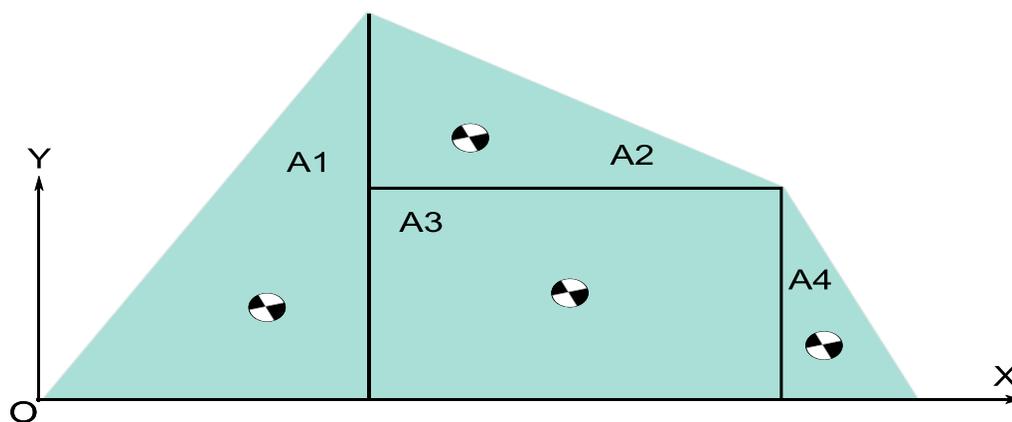
La figura 16.6 presenta además el plano como un todo y dividido en un rectángulo y tres triángulos cuyas bases se alinean convenientemente con el eje X. A partir de las posiciones de los centros de gravedad de cada región, se podrán obtener las coordenadas del centro de gravedad de la figura total, para lo cual se igualarán sus momentos mediante las expresiones siguientes.

$$\sum M_x : \bar{Y}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots + \bar{x}_n W_n \quad (16.15)$$

$$\sum M_y : \bar{X}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots + \bar{y}_n W_n \quad (16.16)$$

Figura 16.6. Determinación del centro de gravedad en sección compuesta





De forma compacta tendríamos:

$$\sum M_x: \quad \bar{Y} \sum W = \sum \bar{x} W \quad (16.17)$$

$$\sum M_y: \quad \bar{X} \sum W = \sum \bar{y} W \quad (16.18)$$

El centro de gravedad de una placa homogénea y de espesor uniforme coincidirá con su centroide y su ubicación en el eje X y Y

$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots + \bar{y}_n A_n \quad (16.19)$$

$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots + \bar{x}_n A_n \quad (16.20)$$

De forma mas general se tendrían las ecuaciones:

$$Q_y = \bar{X} \sum A = \sum \bar{X} A \quad (16.21) \quad Q_x = \bar{Y} \sum A = \sum \bar{Y} A \quad (16.22)$$



Ejemplo 57:

Se requiere determinar el centro de gravedad de la placa perforada de la figura 16.7. A continuación, el cálculo de CG (tabla 16.3).

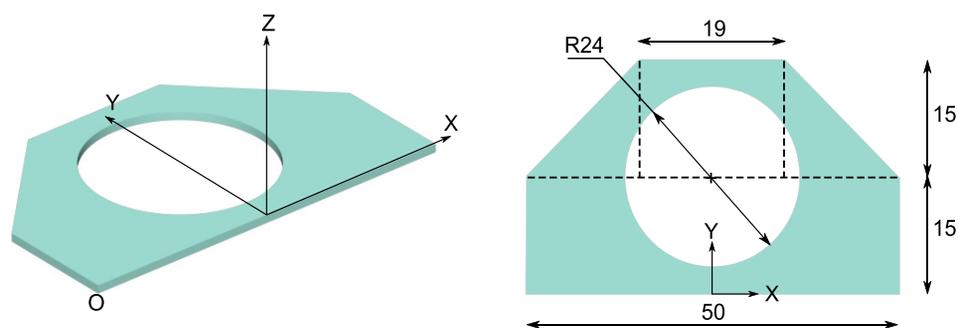
Tabla 16.3. Solución del ejemplo

Región	Gráfico	Área (mm ²)	\bar{x} (mm)	\bar{y} (mm)	$\bar{x} A$ (mm ³)	$\bar{y} A$ (mm ³)
A1		$(20 \cdot 15) / 2$ $A1 = 150$	-15	20	-2250	3000
A2		$15 \cdot 15$ $A2 = 225$	0	22,5	0	5062,5
A3		$(20 \cdot 15)/2$ $A3 = 150$	15	20	2250	3000



A4		$50 \cdot 15$ $A4 = 750$	0	7,5	0	5650
A5		$\pi \cdot (12)^2$ $A5 = -452,3$	0	15	0	-6784,5
		$\Sigma A = 822,7$			$\Sigma \bar{x}A = 0$	$\Sigma \bar{y}A = 9928$

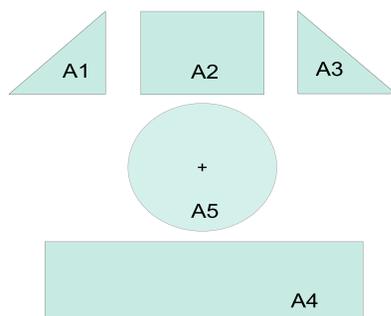
Figura 16.7. Ejemplo para determinar el centro de gravedad



Se ha de tomar en cuenta para la solución de este ejercicio que existe un área sólida de placa y un agujero, el mismo que no aporta área para la determinación del centro de gravedad de la sección compuesta. La figura 16.8 propone dividir la sección en dos triángulos y dos rectángulos que formarán la placa completa, mientras que la región circular tendrá un área negativa para el análisis.



Figura 16.8. Áreas especificadas (ejemplo)



De la tabla anterior, se obtienen los momentos del área, de tal manera que:

$$Q_x = \sum \bar{y}A = 9928$$

$$Q_y = \sum \bar{X}A = 0$$

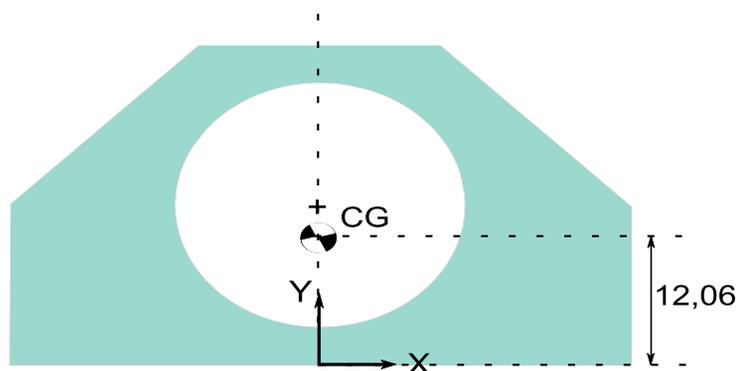
La ubicación del centroide será:

$$\bar{X}(822,7) = 0 \quad \text{de donde } \bar{X} = 0$$

$$\bar{Y}(822,7) = 9928 \quad \text{de donde } \bar{Y} = 12,06 \text{ mm}$$

El valor de 0 hallado en el eje X se debe a la simetría que la geometría posee. El centro de gravedad será entonces:

Figura 16.9. Centro de gravedad de una sección compuesta (ejemplo)

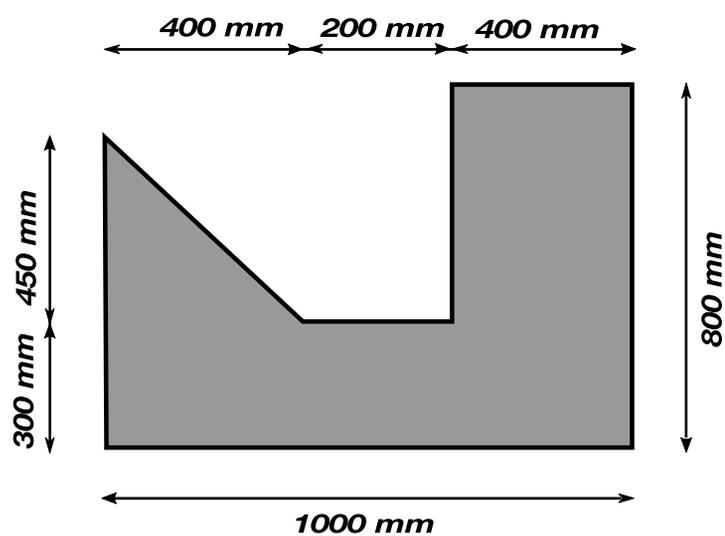




Ejercicios propuestos

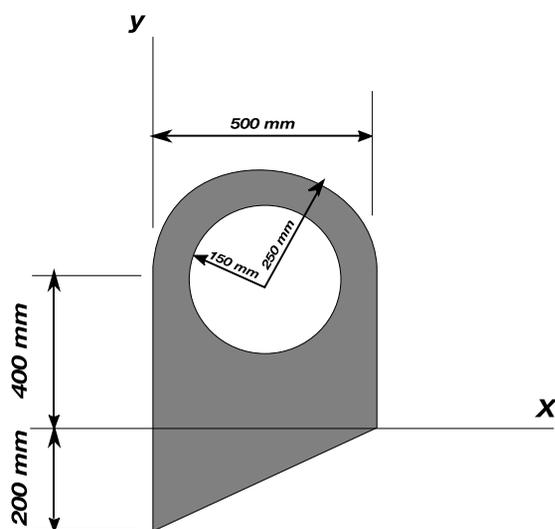
1. Calcular la ubicación del centroide de la siguiente figura geométrica:

Figura 16.10. Esquema del ejercicio



2. Calcular la ubicación del centroide de la siguiente figura geométrica:

Figura 16.11. Esquema del ejercicio

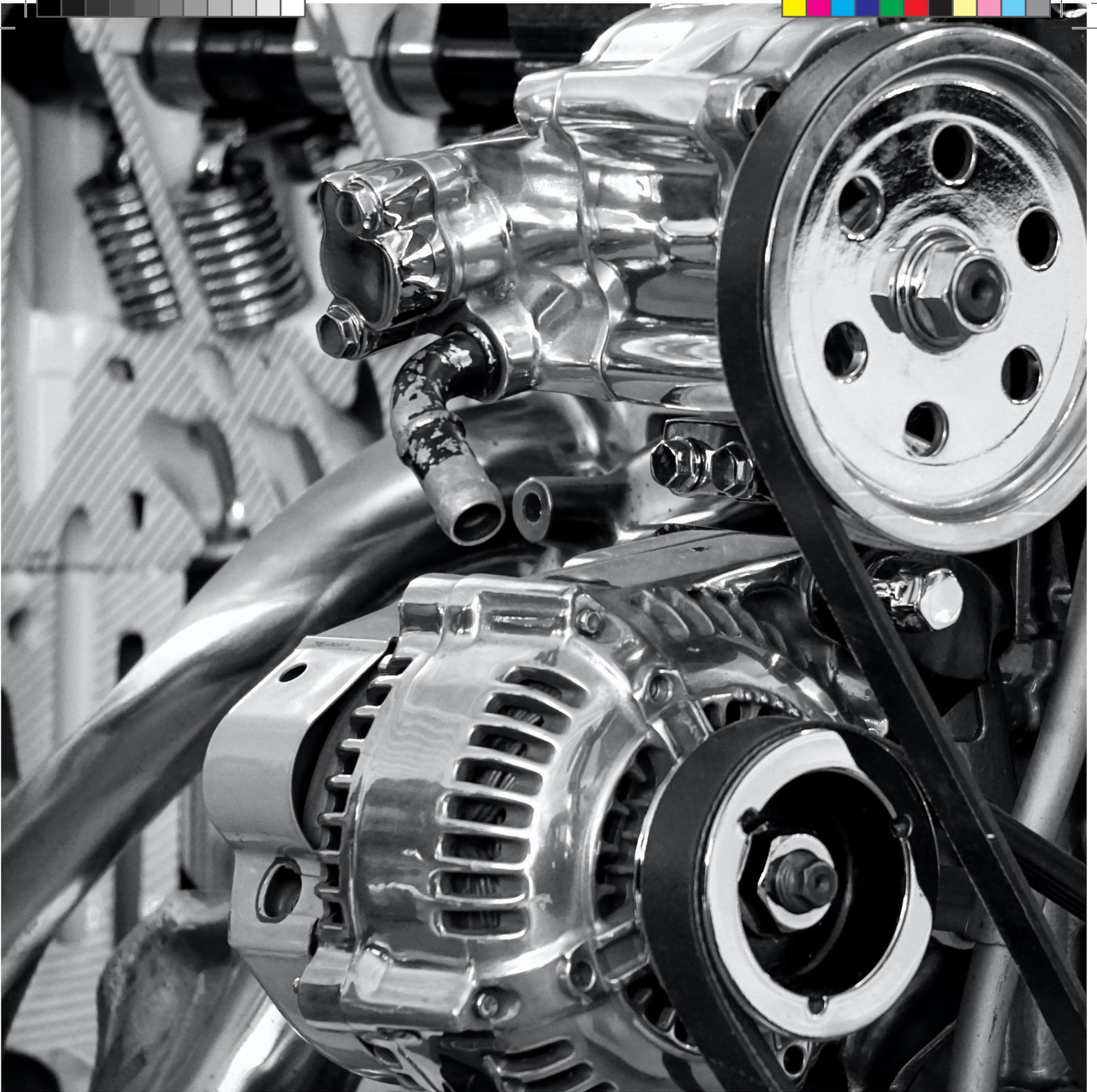


Nombre:

.....

Calificación:

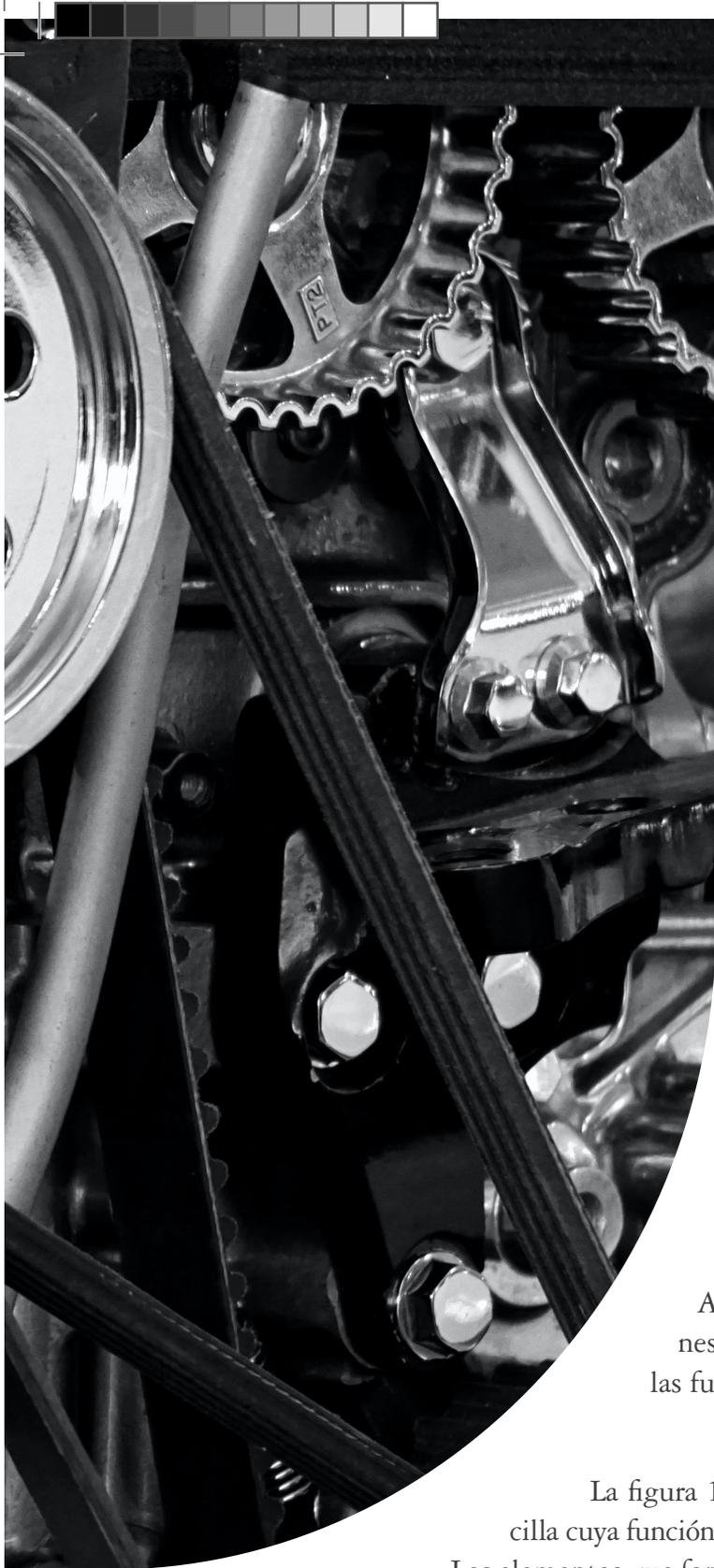




17

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Analizaremos todo sobre las cargas concentradas
- ▶ Conoceremos sobre cargas distribuidas
- ▶ Conoceremos sobre cargas combinadas
- ▶ Resolveremos ejercicios



Capítulo 17

Análisis de estructuras

Una estructura hace referencia a un conjunto de cuerpos o eslabones conectados entre sí y que habitualmente se mantienen en reposo o de forma rígida y cuya función generalmente es la de soportar cargas.

En estos casos, la fuerza no actúa en un solo cuerpo como en los anteriores, sino que existen fuerzas que mantienen unidos los elementos de la estructura. A menudo se busca calcular las reacciones que la mantienen en reposo o, a su vez, las fuerzas de interacción entre sus partes.

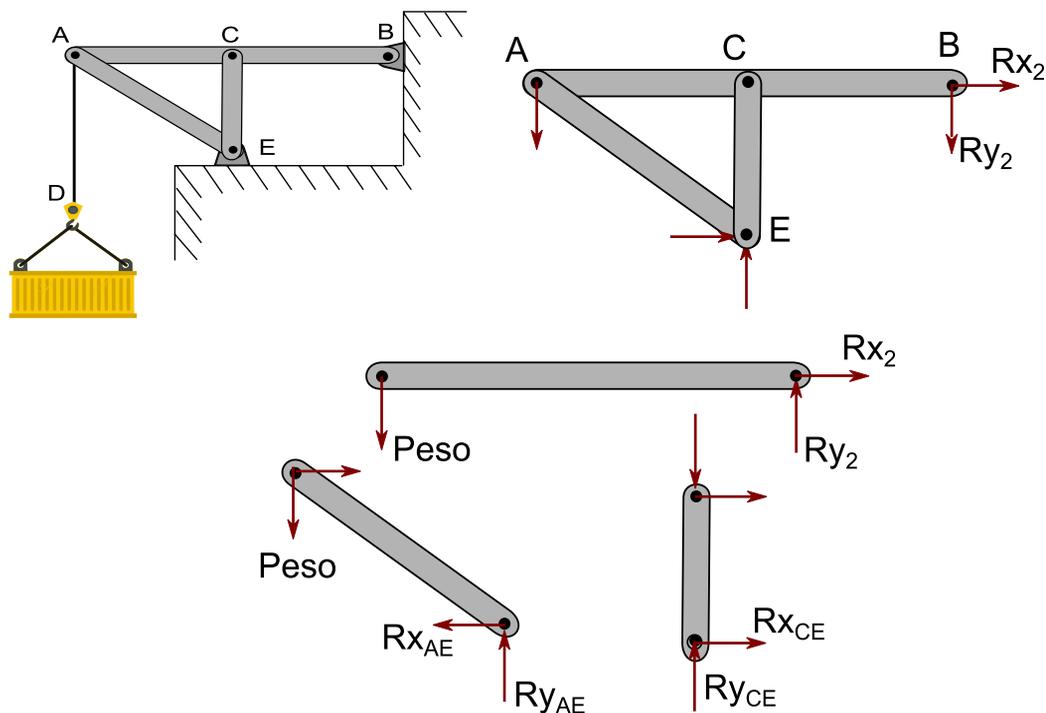
La figura 17.1 presenta un ejemplo de estructura sencilla cuya función es soportar la carga impuesta en el punto D. Los elementos que forman la estructura son los componentes AE, CE, AB. Esta se apoya mediante articulación en los puntos E y B.

En la segunda parte del gráfico, se observa el diagrama de cuerpo libre para toda la estructura con las fuerzas que influyen sobre ella directamente. En tanto, a la derecha, se han separado los componentes con su diagrama de cuerpo libre respectivo. Ha de notarse que, debido a que el apoyo E incide en dos componentes, habrá una reacción para cada elemento que se denominará con subíndices respectivos: $R_{y_{AE}}$ y $R_{y_{CE}}$.



Al revisar el tema de estructuras, existen tres opciones mayormente difundidas: armaduras, armazones y mecanismos.

Figura 17.1. Estructura básica



Armaduras

Hacen referencia a la unión de elementos cuya función en conjunto es soportar cargas con carácter estacionario y cuya movilidad se encuentra restringida. Se caracterizan porque cada elemento se somete a dos fuerzas de la misma dirección pero de sentidos contrarios, que justifican la tercera ley de Newton. Estas fuerzas son aplicadas solamente en las juntas de los elementos.

Armazones

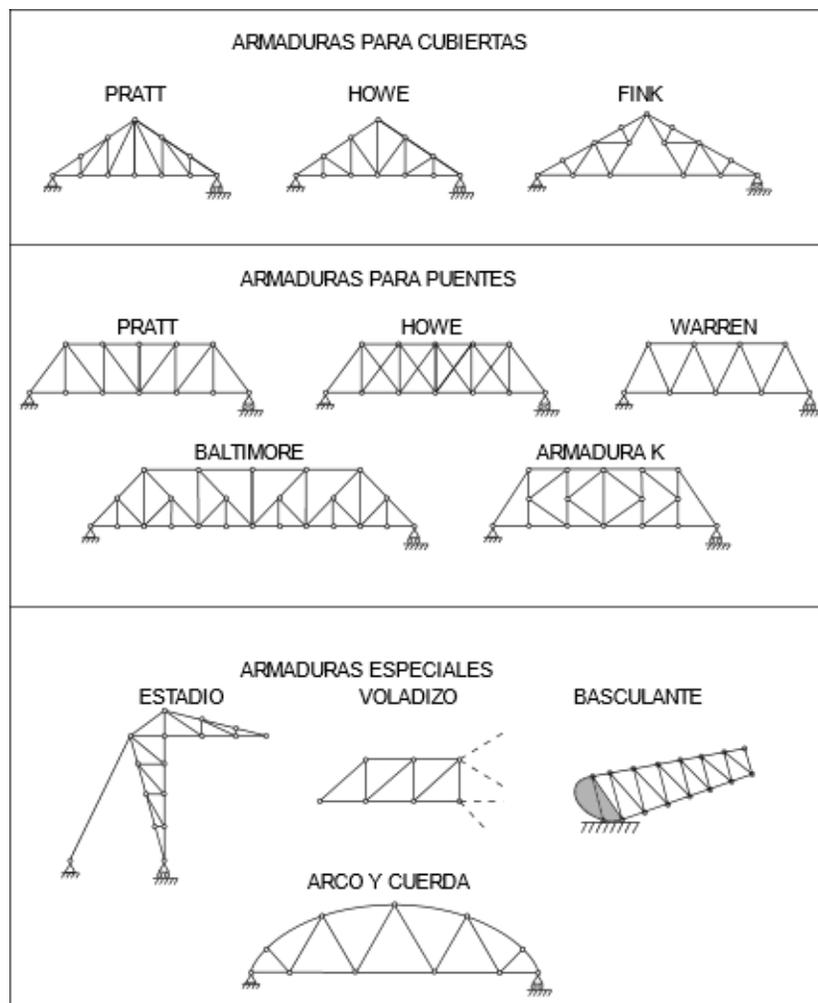
Son una variante de las estructuras en las que al menos un elemento está sometido a tres o más fuerzas. Algunas de estas fuerzas a menudo no se alinean con el o los elementos, por lo que no se aplican solamente en las juntas o nudos.



Mecanismos

Su función es transmitir o modificar fuerzas, y posee elementos que tienen movimiento. Como en los armazones, también existen partes que se someten a múltiples fuerzas (tabla 17.1).

Tabla 17.1. Tipos de armaduras



Existen múltiples métodos para el análisis de estructuras y armazones. Primeramente, se explicará el método analítico, que aplica las leyes de Newton que caracterizan al estado de reposo.



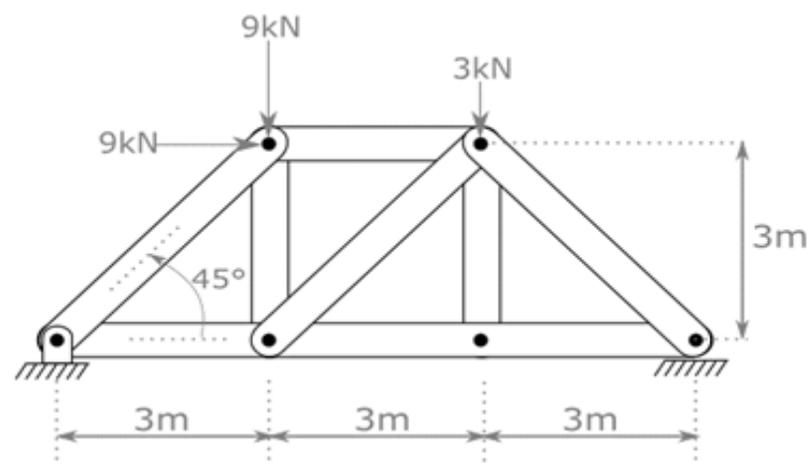
Análisis por el método de nodos

Este método de carácter analítico deberá ser resuelto considerando adecuadamente el sistema de referencia. A continuación, se numeran los pasos necesarios para ejecutarlo.

1. Se calculan las reacciones en los apoyos. Se realizará considerando las leyes de Newton, así como la sumatoria de momentos respecto al punto que más incógnitas posee.
2. Se considera un punto, generalmente un apoyo, al que se aplicará las ecuaciones de la estática. Se determinarán fuerzas, las mismas que tendrán un resultado numérico o a su vez plantearán ecuaciones para análisis de posteriores nodos.
3. Se procede de nodo en nodo planteando las ecuaciones respectivas y un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.
4. Se resuelve el sistema y se hallan todas las fuerzas a las que se someten los elementos.

Dada la armadura de la figura 17.2, se requiere determinar las fuerzas axiales de compresión y tracción de todos los elementos.

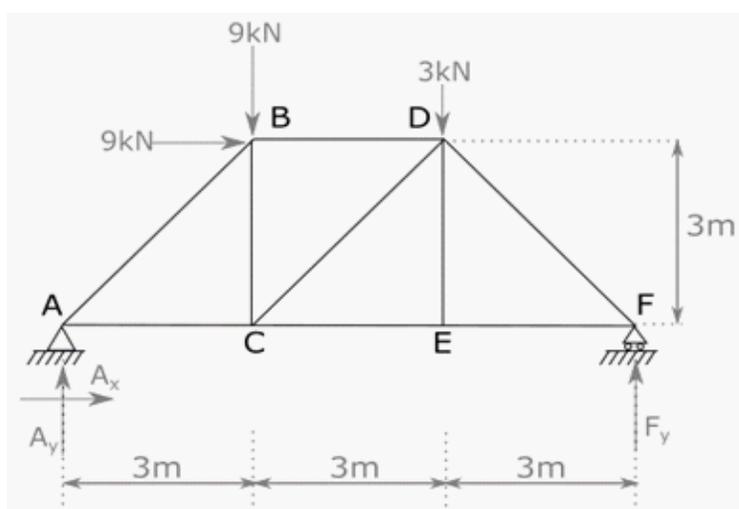
Figura 17.2. Ejercicio sobre armaduras





Se analiza estáticamente toda la armadura, para lo cual el gráfico puede representarse de forma simplificada con sus incógnitas, nomenclatura, fuerzas aplicadas y apoyos, como en la figura 17.3.

Figura 17.3. Fuerzas sobre armadura (ejemplo)



Considerando la armadura plana ubicada en el plano XY, deberá emplearse la sumatoria en los ejes X y Y igual a cero. Dado que hay tres incógnitas, se hará uso de la sumatoria de momentos igual a cero en un punto conveniente que permita eliminar un mayor número de incógnitas, en este caso los momentos respecto del punto A.

Por tanto, se tendrá que:

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x + 9 = 0$$

$$A_x = -9$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + F_y - 9 - 3 = 0$$

$$A_y + F_y = 12$$



Se obtiene la sumatoria de momentos en los apoyos:

$$\sum M_A = 0$$

$$-9(3) - 9(3) - 3(6) + F_y(9) = 0$$

$$F_y = 8 \text{ kN}$$

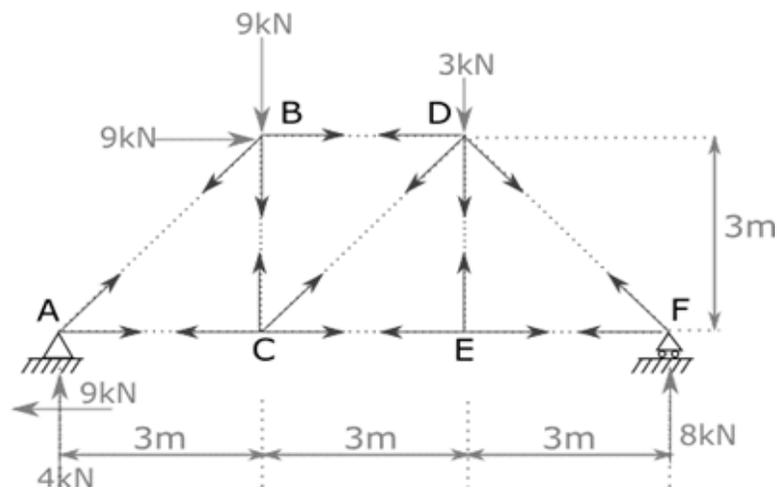
$$\sum M_B = 0$$

$$3(3) + 9(6) - 9(3) - A_y(9) = 0$$

$$A_y = 4 \text{ kN}$$

De donde se han obtenido todas las reacciones (figura 17.4).

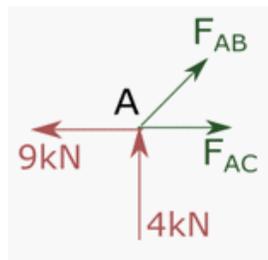
Figura 17.4. Determinación de fuerzas de tracción y compresión



Se colocan las reacciones determinadas y se grafican las fuerzas que salen de los nodos de la estructura en dirección de los elementos.

A continuación, se analiza nodo por nodo comenzando por el A (figura 17.5).

Figura 17.5. Nodo A - Ejemplo analítico



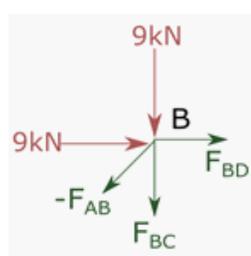


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ 4 + F_{AB} \operatorname{sen} 45^\circ &= 0 \\ F_{AB} &= -5,65 \text{ kN} \\ F_x &= 0 \\ -9 + F_{AC} + F_{AB} \cos 45^\circ &= 0 \\ F_{AC} &= 9 - (-5,65) \cos 45^\circ \\ F_{AC} &= 13 \text{ kN}\end{aligned}$$

Para el nodo B (figura 17.6):

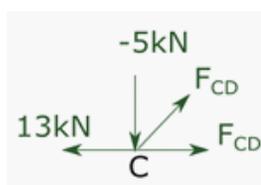
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ -F_{BC} - 9 + 5,65 \cos 45^\circ &= 0 \\ F_{BC} &= -5 \text{ kN} \\ \sum F_x &= 0 \\ -F_{BC} - 9 + 5,65 \operatorname{sen} 45^\circ &= 0 \\ F_{BC} &= -5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Figura 17.6. Nodo B - Ejemplo analítico



Para el nodo C (figura 17.7):

Figura 17.7. Nodo C - Ejemplo analítico

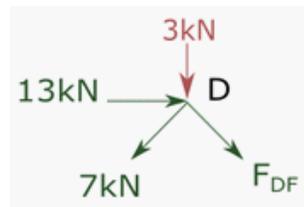




$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ -5 + F_{CD} \sin 45^\circ &= 0 \\ F_{CD} &= 7 \text{ kN} \\ \sum F_x &= 0 \\ F_{CF} - 13 + F_{CD} \cos 45^\circ &= 0 \\ F_{CF} &= 8 \text{ kN}\end{aligned}$$

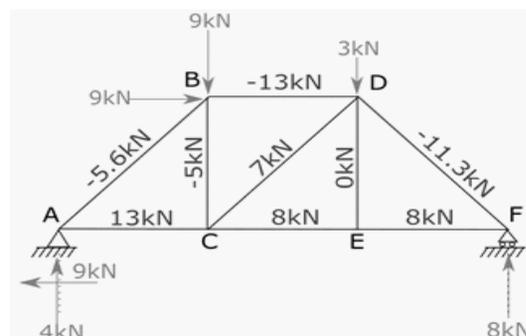
Para el nodo D (figura 17.8):

Figura 17.8. Nodo D - Ejemplo analítico



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ -F_{DF} \sin 45^\circ - 3 - 7 \sin 45^\circ &= 0 \\ F_{DF} &= -11,3 \text{ kN} \\ \sum F_x &= 0 \\ F_{DF} \cos 45^\circ + 13 - 7 \cos 45^\circ &= 0 \\ F_{CF} &= 11,3 \text{ kN}\end{aligned}$$

Figura 17.9. Fuerzas internas determinadas (ejemplo)





Método gráfico de Cremona-Maxwell

Otro método de utilidad en el ámbito de las estructuras es el método de Cremona-Maxwell. A menudo y con el incremento de *software* gráfico, este método logra en tiempos cortos excelentes resultados siempre y cuando se maneje correctamente. Es una extensión del empleo de polígonos de fuerza de análisis vectorial. Dado que la estructura se encuentra en reposo, la sumatoria de fuerzas deberá ser cero y formar un polígono cerrado de fuerzas. Estas líneas que se trazarán poseen un orden específico y sentidos acordes con sistemas de referencia establecidos. Por tanto, el orden en su ejecución es de suma importancia para lograr resultados consistentes.

Una consideración importante es que este método se emplea y es de utilidad para celosías o estructuras que satisfacen la ecuación:

$$2n - 3 = b \quad (17.1)$$

En donde se tiene que:

n: número de nudos

b: número de barras

Cabe destacar que deberá tratarse, por tanto, de estructuras estáticamente determinadas.

Las reglas para construir el diagrama de Cremona-Maxwell son:

1. Desde cada fuerza exterior de la estructura se extenderá una línea infinita hacia fuera, generando zonas delimitadas exteriores.
2. Las rectas infinitas y los tramos entre fuerzas que delimitan cada área exterior se enumeran en sentido horario y, siguiendo la notación, también se enumeran las zonas internas.
3. La letra que designa la primera región se coloca como un punto en el plano euclídeo, a partir del cual se graficará el diagrama Cremona-Maxwell.
4. En el mismo sentido horario, la siguiente área contigua estará separada por una fuerza. Se trazará esa fuerza en el mismo sentido partiendo de la primera letra escrita hasta la letra de la región contigua.



5. Se continúa graficando las fuerzas y numerándolas repitiendo el paso anterior hasta cerrar el polígono, que contendrá todas las fuerzas y letras de las regiones limitadas.
6. Se procede a dibujar rectas que limitan zonas interiores trasladando paralelas que pasarán por los puntos ya descritos en el diagrama. Sus rectas, al encontrarse, determinarán la letra de la zona asociada. Este paso se realiza en juntas donde existan dos incógnitas, para que luego, al reducir las incógnitas de los otros nudos, este proceso sea mas sencillo.

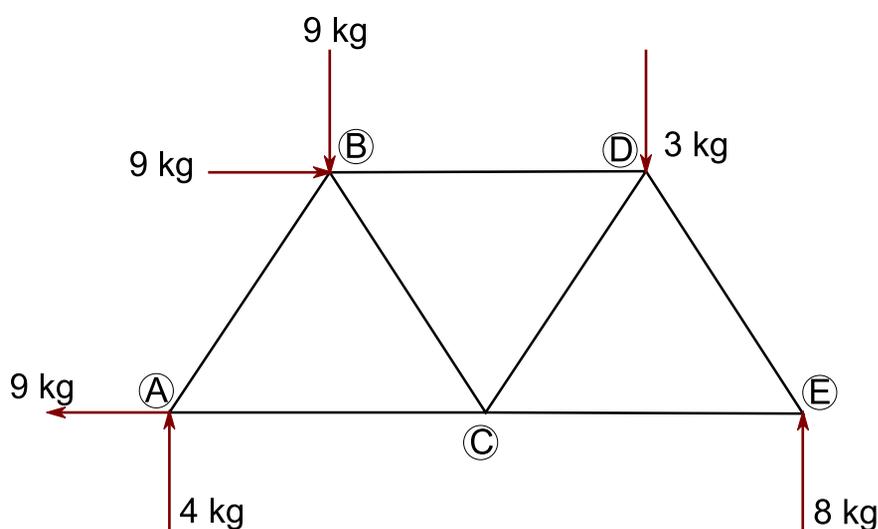
Obtenido el gráfico con este método, las dimensiones entre los puntos determinarán las magnitudes de las fuerzas considerando la escala a la que se comenzó a realizar el dibujo.

Respecto del sentido de las fuerzas y para saber si son de compresión o tracción, se deberá, según la nomenclatura, trazar flechas que se desplazarán al nodo analizado y colocar su contrario del lado opuesto del elemento respectivo. Este sentido muestra la reacción del elemento, por tanto, el efecto contrario dará el carácter de tracción o compresión al elemento.

Dada la armadura de la figura 17.10, determina las fuerzas de compresión y tracción para todos los elementos.

Previamente se han determinado las fuerzas de reacción en los apoyos. Dado que el apoyo del lado izquierdo es una articulación de rotación, esta tendrá dos componentes, en tanto que a la derecha se trata de un apoyo móvil. Las cargas de la estructura son aplicadas en nudos.

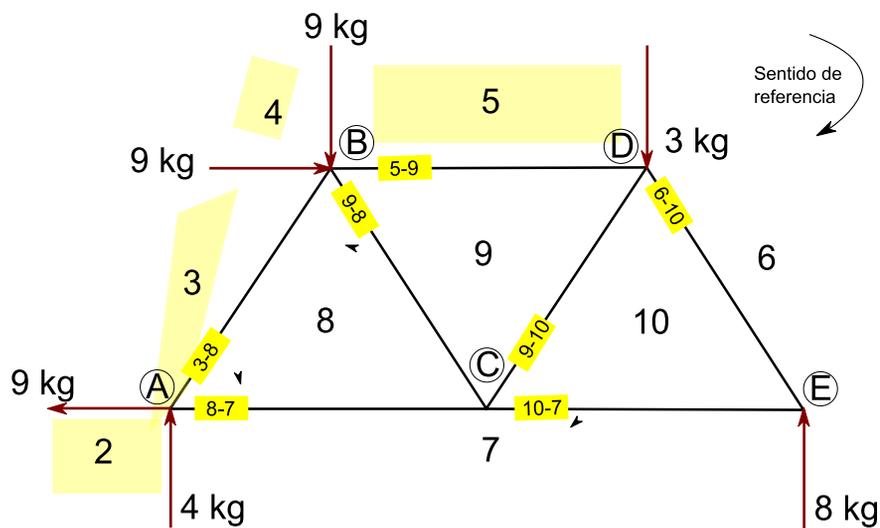
Figura 17.10. Aplicación de fuerzas en armadura





Según los pasos descritos para este método, las fuerzas delimitan zonas externas que se han sombreado y enumerado como 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en sentido horario. A continuación, se colocan letras en las áreas internas siguiendo el mismo orden (figura 17.11).

Figura 17.11. Aplicación del método de Cremona-Maxwell



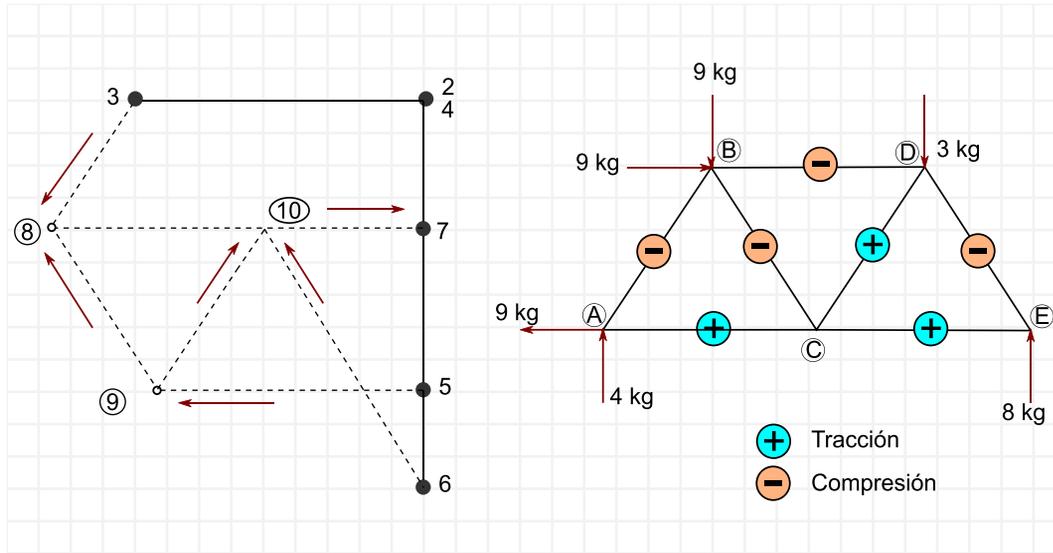
La nomenclatura de las barras se ha representado en función de las áreas que dividen y en sentido horario para los puntos de análisis.

Para iniciar el diagrama, se tomará como primer punto el área numero 2, la misma que se representará como un punto en el espacio euclídeo de dos dimensiones en la figura 17.12.

Mediante los números de regiones y vectores fuerza, se realiza el gráfico comenzando por 2 hasta volver a 2 cerrando el polígono con los vectores de fuerzas externas.

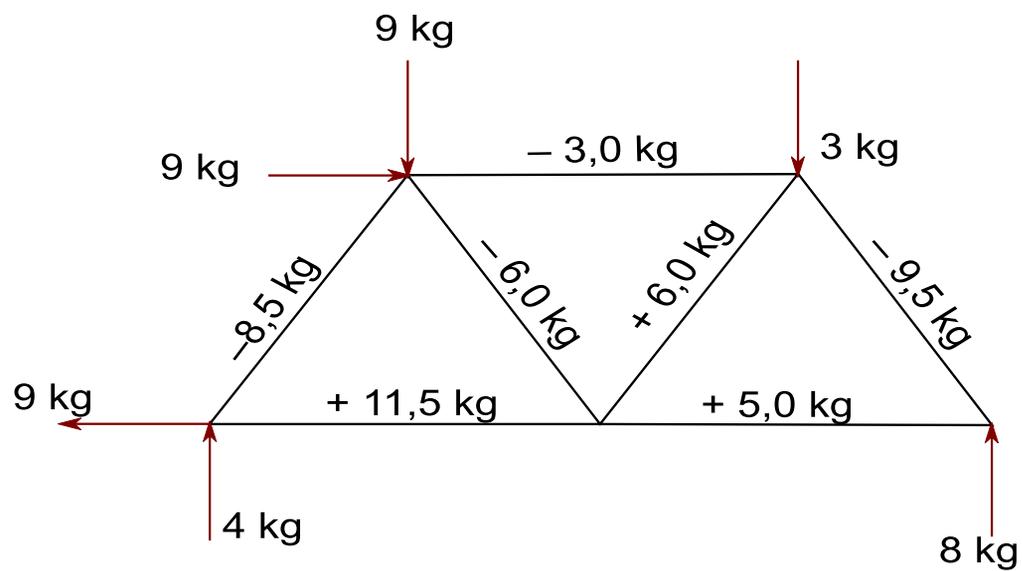


Figura 17.13. Diagrama de Cremona-Maxwell (ejemplo)



Las distancias en el diagrama correspondientes a cada elemento presentarán las magnitudes de fuerzas axiales de compresión y/o tracción de los elementos. En la figura 17.14 se aprecian las cargas determinadas para cada elemento.

Figura 17.14. Soluciones por el método de Cremona-Maxwell

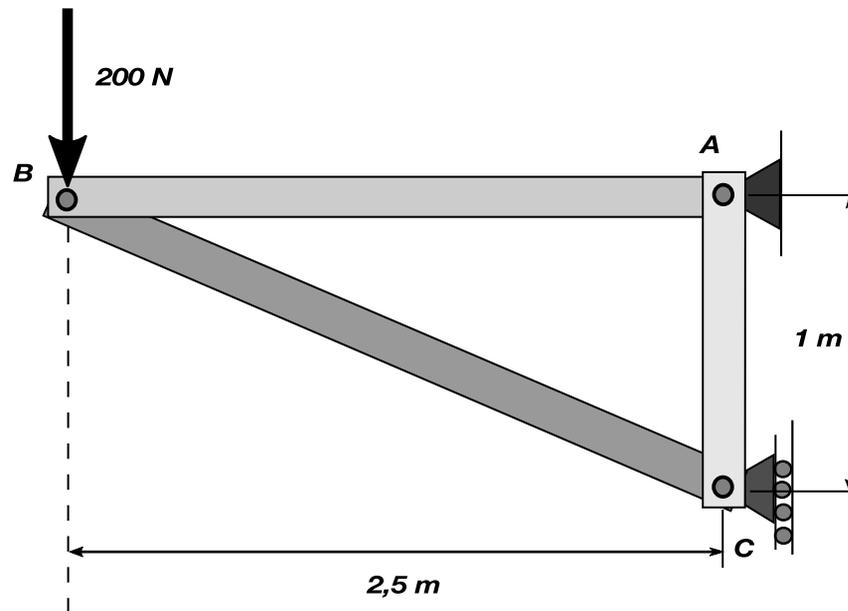




Ejercicios propuestos

1. Utiliza el método de los nodos para determinar la fuerza presente en cada elemento de las armaduras. Establece si los elementos están en tensión o en compresión (figura 17.15).

Figura 17.15. Esquema del ejercicio



Nombre:

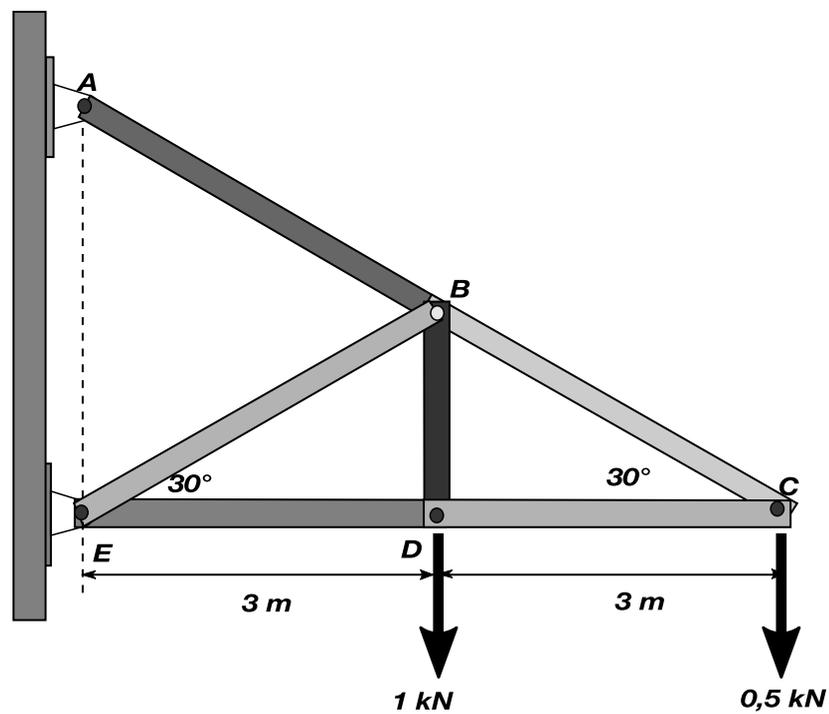
.....

Calificación:



2. Determina la fuerza en cada miembro de la armadura y establece si los miembros están a tensión o en compresión.

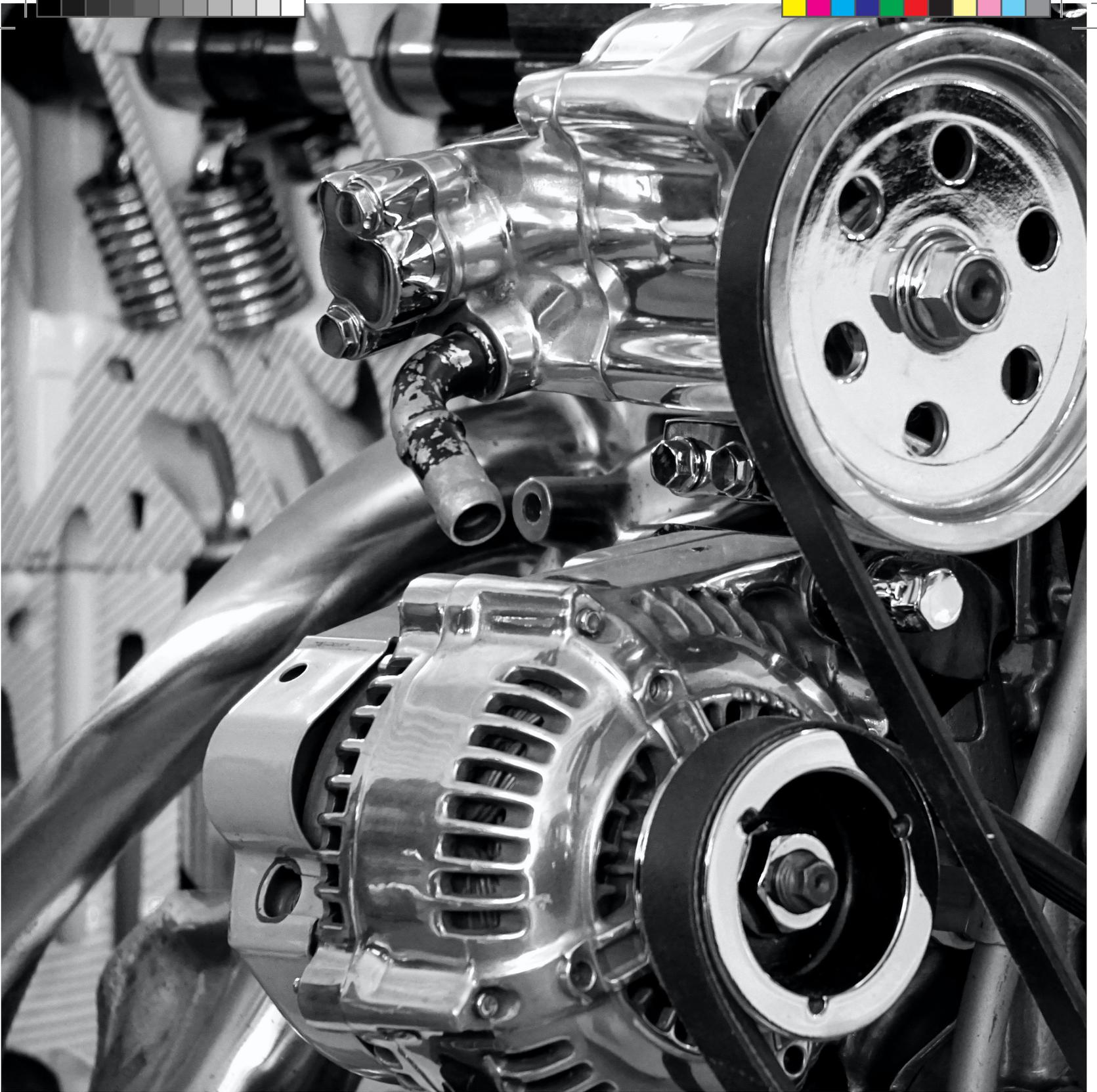
Figura 17.16. Esquema del ejercicio



Nombre:

.....

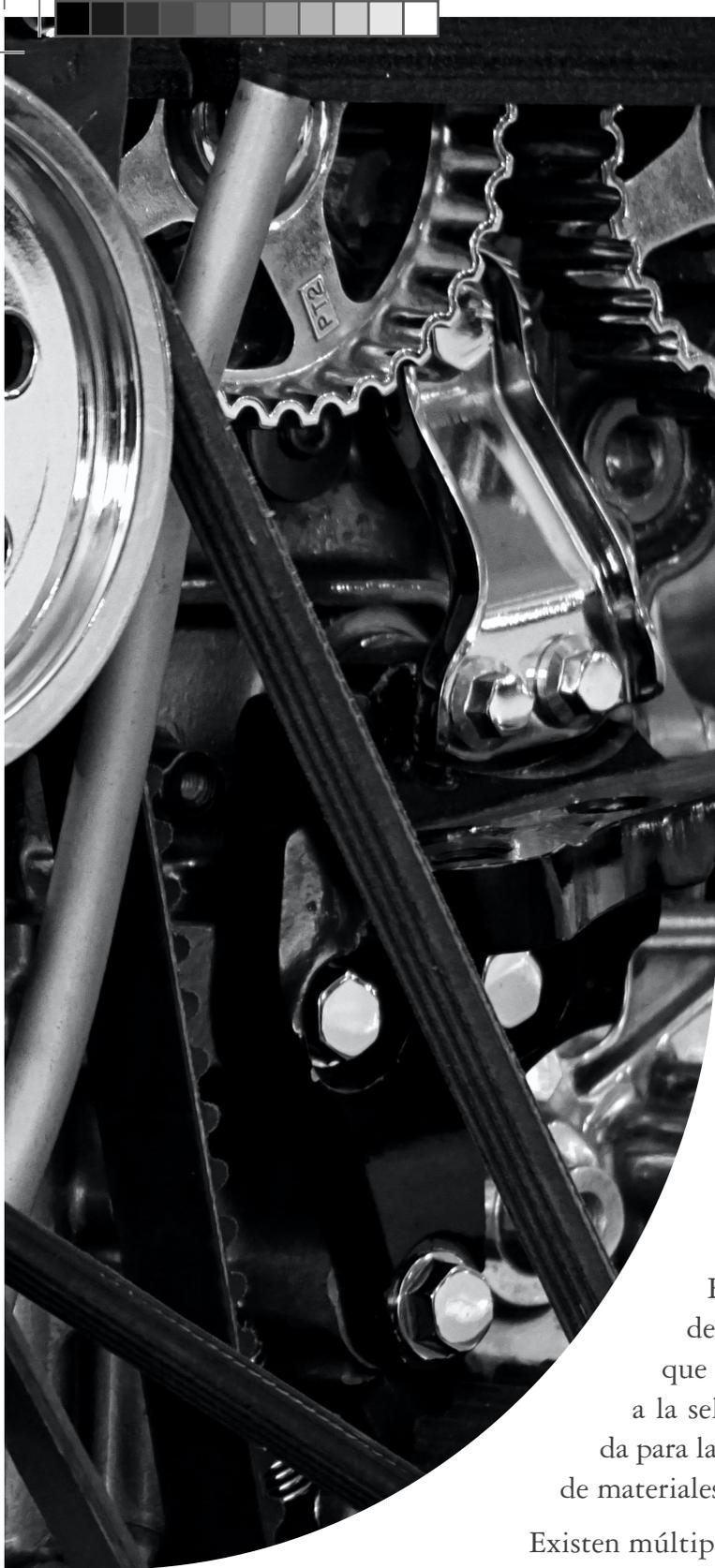
Calificación:



18

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en los capítulos previos
- ▶ Conoceremos una aplicación de laboratorio sobre fuerza de roce
- ▶ Tomaremos datos experimentales



Capítulo 18

Vigas

A diferencia del caso anterior, en el que se abordó el análisis de estructuras, este apartado toma en cuenta cargas a lo largo del elemento, un caso muy empleado en el diseño estructural. Lo ideal en una estructura es transmitir las fuerzas a las que somete una viga hacia los nudos; sin embargo, deberá considerarse el tipo de viga que ha de soportar estas cargas. Es ahí donde se encuentra la necesidad de analizar las fuerzas axiales y flexionantes que afectan a la viga como un análisis previo a la selección de una sección transversal adecuada para las cargas, ámbito de estudio de la mecánica de materiales.

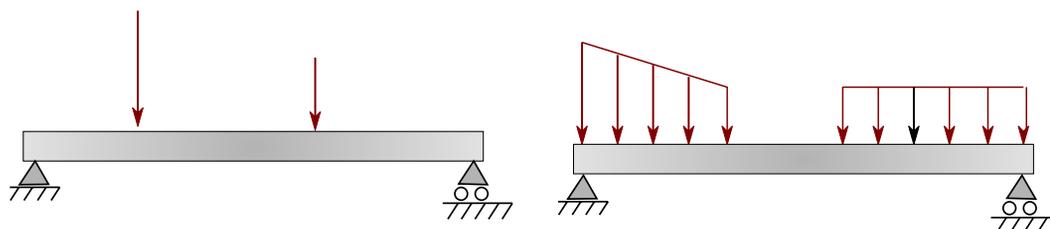
Existen múltiples posibilidades de carga para las vigas:

- Cargas concentradas
- Cargas distribuidas
- Combinación de cargas

Los dos primeros casos se representan en la figura 18.1.

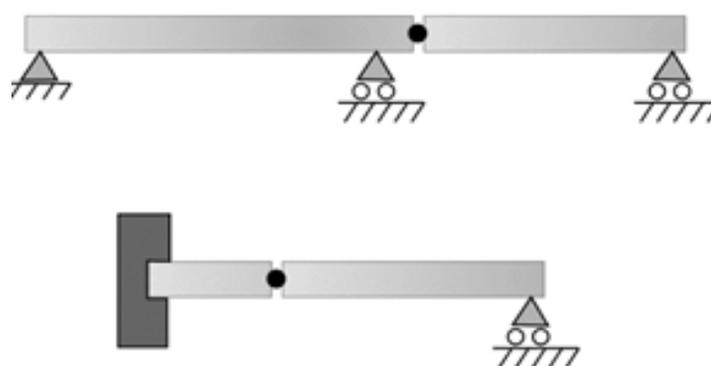


Figura 18.1. Cargas concentradas y distribuidas sobre vigas



Las vigas se clasifican de acuerdo a su tipo de apoyo en dos casos importantes: estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas.

Figura 18.2. Vigas continuas conectadas por articulaciones



Otra variante de las vigas son las continuas conectadas por articulaciones (figura 18.2). Para estos casos se puede analizar las vigas por separado y generar seis incógnitas. Dado que son dos elementos con tres ecuaciones de la estática, el sistema puede resolverse.

Fuerza cortante en vigas

Resulta de interés en múltiples ocasiones conocer la fuerza y los momentos que actúan en una viga en puntos específicos. Estos parámetros pueden determinarse mediante el análisis parcial de la viga seccionada en los puntos de interés.

En primer lugar, deben resolverse las reacciones en los apoyos de la viga, siempre que esta sea estáticamente determinada.

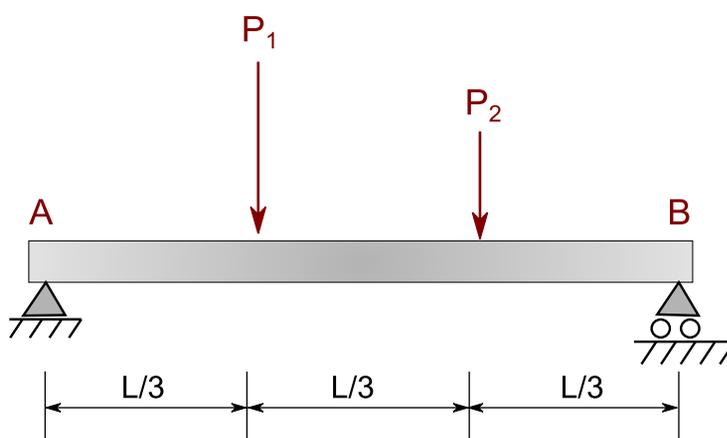
Como segundo paso, se plantearán una fuerza cortante V y un momento M en cualquier punto de interés, mientras que sus reacciones V' y M' afectarán a la otra porción de la viga.



Posteriormente se realizará la sumatoria de fuerzas y momentos con respecto al punto por donde se ha seccionado la viga. Se obtienen de esta manera valores de fuerzas cortantes y momentos. Cabe recalcar que, impuesto el sentido de la fuerza y momento, si el signo de la solución es positivo, entonces se tratará de un sentido correctamente elegido en la representación. Caso contrario deberán revertirse las flechas para una mejor representación.

A continuación, se realiza un ejemplo con la viga de la figura 18.3. En ella actúan las fuerzas P_1 y P_2 de 3 y 2 kN, respectivamente. La condición de los apoyos presenta un caso estáticamente determinado, por tanto, se procede como primer punto a determinar las reacciones en los apoyos A y B.

Figura 18.3. Cargas puntuales en viga



Considerando las cargas y los valores de las cargas P_1 y P_2 , se procede a plantear la sumatoria de momentos para el punto A en vista de que eliminará incógnitas permitiendo el cálculo directo de la reacción en B como se realiza a continuación

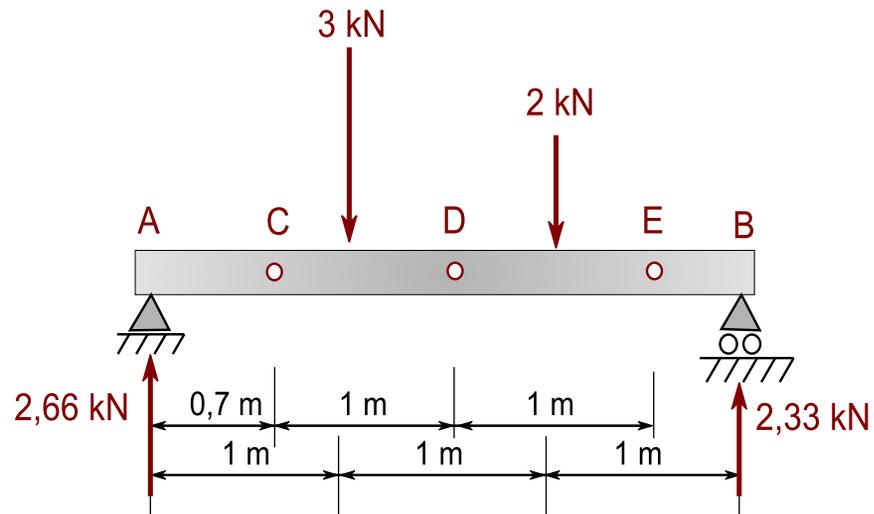
$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\ -3(1) - 2(2) + RB_y(3) &= 0 \\ RB_y &= 2,33 \text{ kN}\end{aligned}$$

De donde

$$RA_y = 2,66 \text{ kN}$$

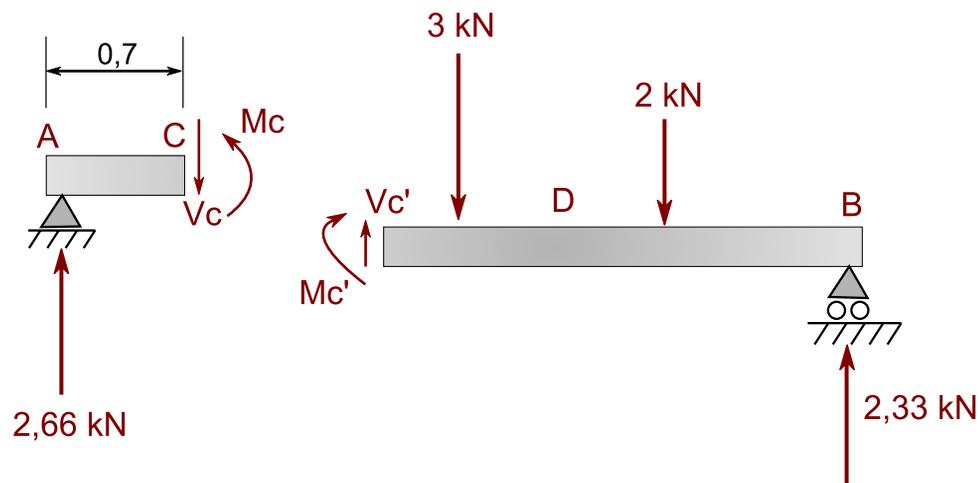


Figura 18.4. Determinación de fuerzas cortantes en vigas (ejemplo)



Las soluciones halladas se han graficado (figura 18.4). Se han colocado, además, en el mismo gráfico, los puntos en donde interesa conocer los valores de fuerzas cortantes y momentos flectores (figura 18.5).

Figura 18.5. Análisis de la sección AC



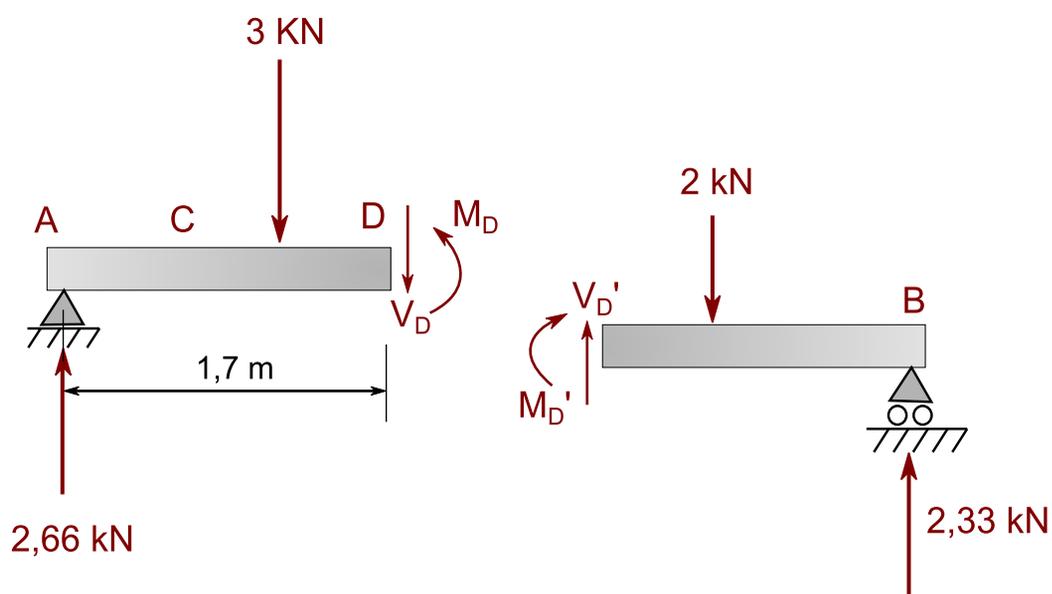


Análisis de sección AC (figura 18.6):

$$\sum F_y = 0 \quad 2,66 - V = 0 \quad \text{de donde} \quad V = 2,66 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 \quad - 2,66(0,7) + M_C = 0 \quad \text{de donde} \quad M_C = 1,86 \text{ kNm}$$

Figura 18.6. Análisis de la sección AD



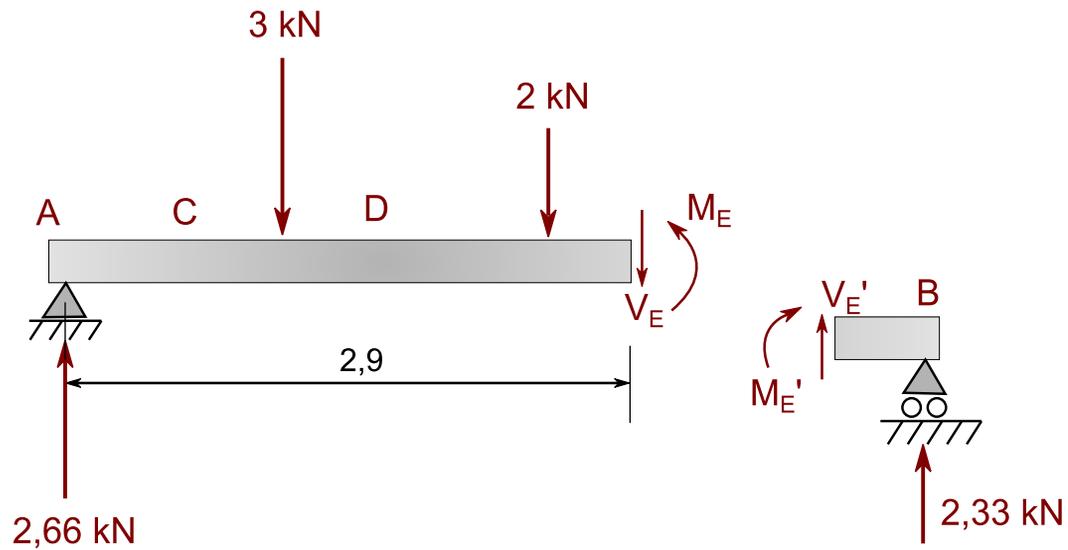
Análisis de sección AD (figura 18.7):

$$\sum F_y = 0 \quad 2,66 - 3 - V_D = 0 \quad \text{de donde} \quad V_D = - 0,44 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \quad - 2,66(1,7) + 3(0,3) + M_D = 0 \quad \text{de donde} \quad M_D = 3,62 \text{ kNm}$$



Figura 18.7. Análisis de la sección AE



Análisis de sección AE:

$$\sum F_y = 0 \quad 2,66 - 3 - 2 - V_E = 0 \quad \text{de donde } V_E = -2,34 \text{ kN}$$

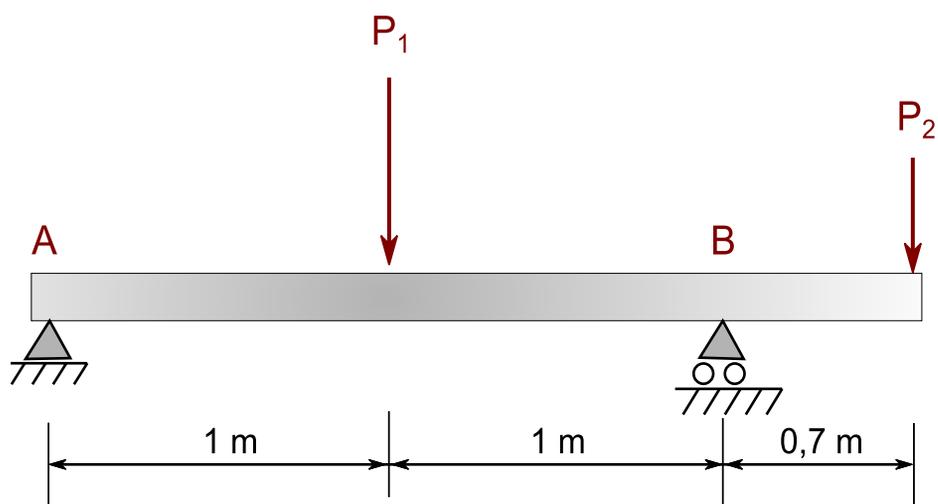
$$\sum M_E = 0 \quad -2,66(2,9) + 3(1,9) + 2(0,7) + M_E = 0 \quad \text{donde } M_E = 0,614 \text{ kNm}$$

La solución del ejemplo anterior puede emplearse para generar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes a lo largo de toda la viga. Se deberán considerar puntos convenientemente cerca de los puntos de presencia de carga o apoyos.

Se propone para el siguiente ejemplo la figura 18.8.



Figura 18.8. Ejemplo para determinación de fuerza cortante en viga



Se establecen puntos intermedios (figura 18.9), y se determina el diagrama de cortante y momento (figura 18.10).

Figura 18.9. Ejemplo para determinación de fuerza cortante en viga

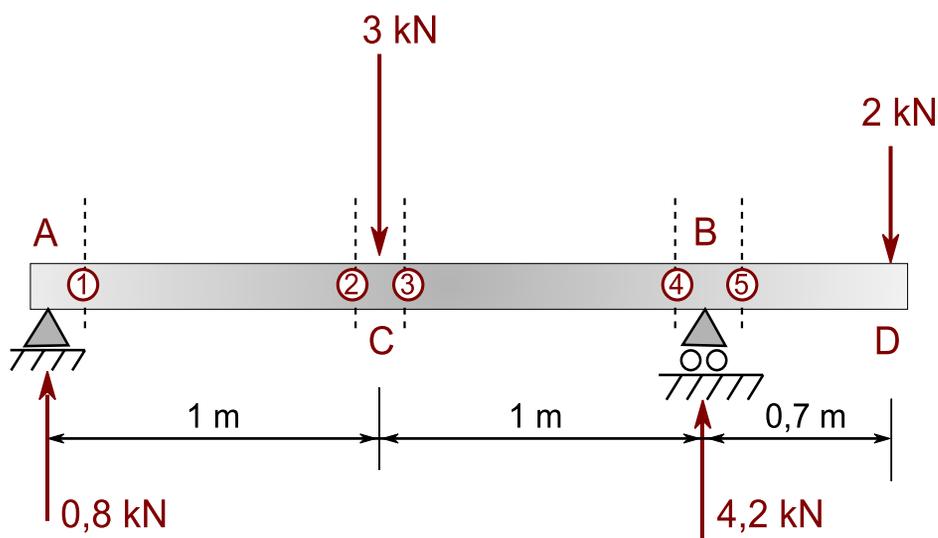
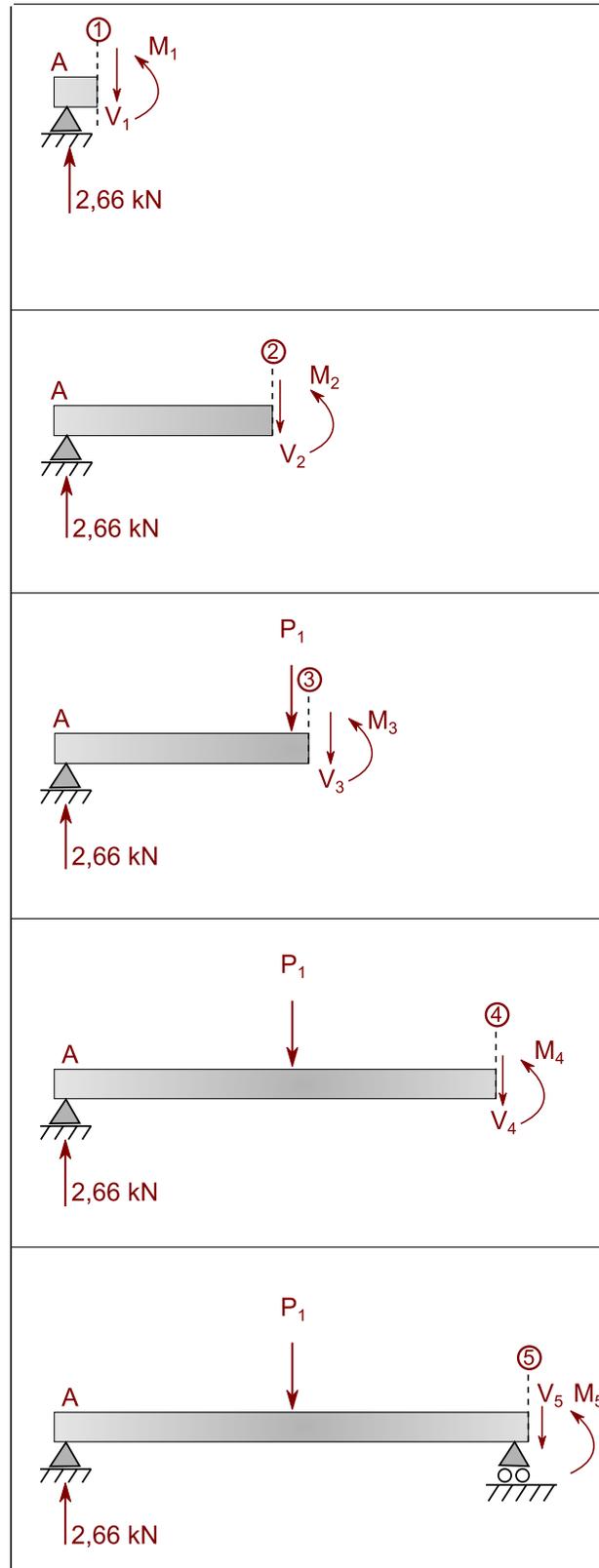




Figura 18.10. Movimiento rectilíneo en sentidos contrarios

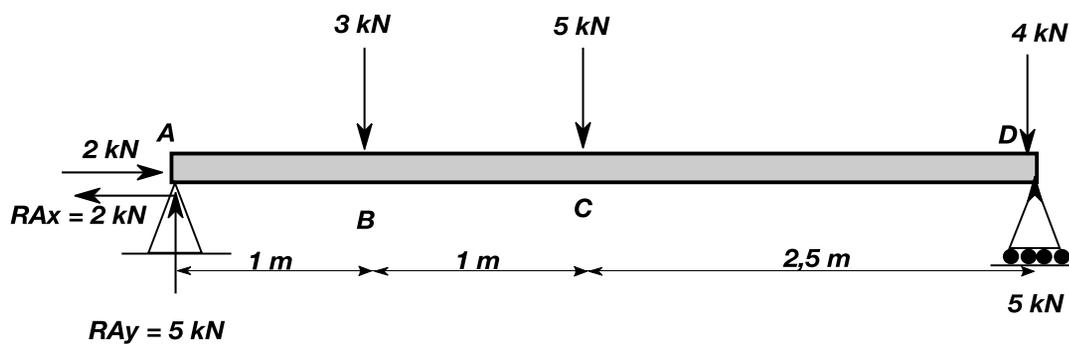




Ejercicios propuestos

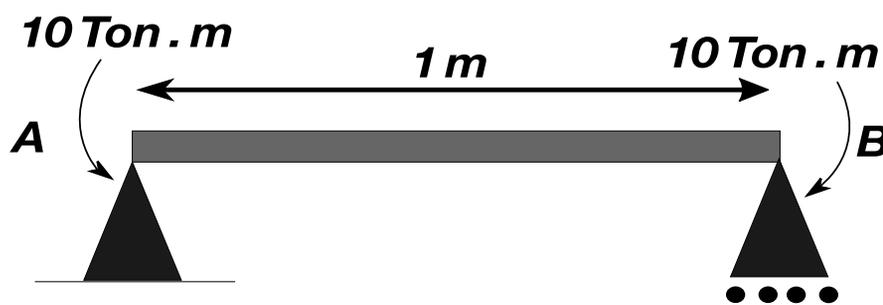
1. Obtén los diagramas de cortante y momento flector de la figura.

Figura 18.11. Esquema del ejercicio



2. Obtén los diagramas de cortante y momento flector de la figura.

Figura 18.12. Esquema del ejercicio



Nombre:

.....

Calificación:



Referencias

[1] H. D. Young y R. A. Freedman, eds. *Sears-Zemansky: Física universitaria, volume 1*. Ciudad de México, Pearson Educación, 2009.

[2] D. Giancoli. *Física general, volumen I*. Ciudad de México, Prentice Hall, 2001.

[3] F. Lévano-Castillo. *Orígenes de la aviación nacional: soñadores, pioneros y realidad 1905-1919*. Lima, Universidad Católica del Perú, 2014.

[4] C. Guerra-Vela, N. Pinto y J. González-Sánchez. *Manual de laboratorio de física universitaria*. Santurce, Universidad de Puerto Rico, 2008.

[5] D. T., Gillespie. *Introducción a la mecánica cuántica*. Madrid, Reverté, 2021.

[6] S. de las Heras. *Mecánica de los fluidos en ingeniería*. Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, 2012.

[7] *Manual de prácticas de laboratorio de física*. Colegio de Bachilleres del estado de Baja California Sur, 2011

[8] M. Gómez, J. Shaadi. *Prácticas de laboratorio de física*. Aguascalientes, Universidad Autónoma de Aguascalientes, 2006.



Prácticas de Laboratorio





Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en los capítulos previos
- ▶ Conoceremos una aplicación de laboratorio sobre péndulo simple
- ▶ Tomaremos datos experimentales



Práctica 1

Fuerza de roce

Objetivo general

Determinar el coeficiente de fricción estática entre dos superficies.

Objetivos específicos

- Determinar el coeficiente de fricción estática, en forma analítica y gráfica, entre dos objetos cuyas superficies o áreas de contacto se encuentran en un plano horizontal.
- Determinar el coeficiente de fricción estática entre dos objetos cuyas áreas de contacto se encuentran en un plano inclinado.

Fundamentos teóricos

Fuerzas de fricción o roce

Las fuerzas de roce o fricción son fuerzas que surgen como consecuencia del contacto entre dos cuerpos que, por su naturaleza, se oponen a cualquier tipo de movimiento relativo entre ellos [1-2]. Una fuerza F intenta sacar del reposo a la masa M (figura 19.1) y, como respuesta a dicha acción, surge una fuerza que equilibra a la fuerza aplicada y logra que se mantenga la condición de reposo de M . Esta fuerza recibe el nombre de fuerza de roce o de fricción estática (F_{fe}).

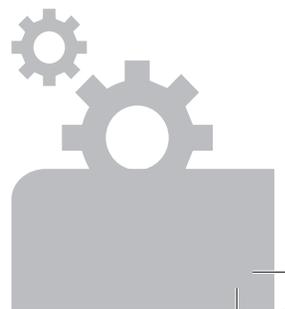
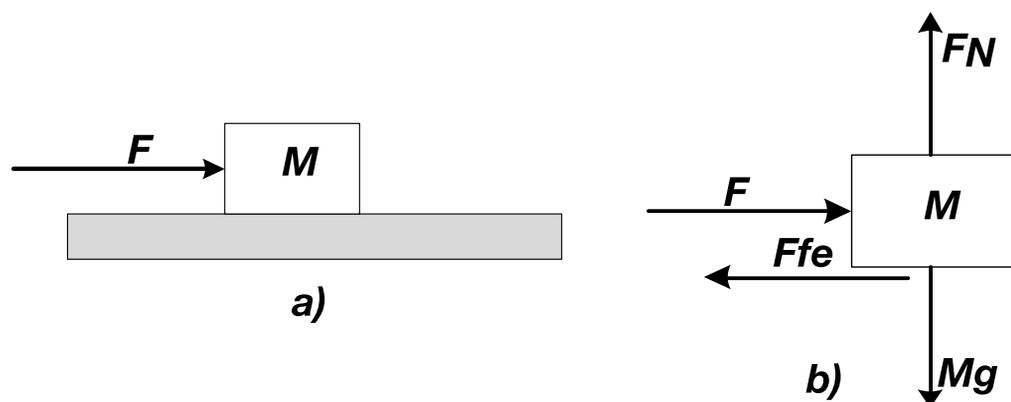




Figura 19.1. a) Diagrama representativo de una fuerza F que intenta sacar del reposo a la masa M . b) Diagrama de cuerpo libre de la masa M presentada en la condición a)



Hay que destacar que la fricción entre dos superficies sólidas siempre va a existir, porque a pesar de que, en apariencia o incluso al tacto, las superficies sean lisas, a escala microscópica poseen muchas rugosidades o irregularidades superficiales.

Tipos de fuerzas de fricción o roce

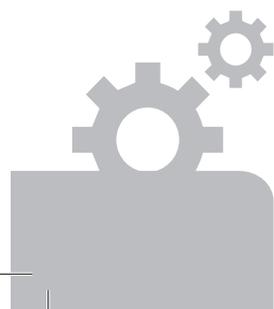
Fuerza de fricción estática: es una fuerza que se opone a que un objeto comience a deslizarse sobre la superficie en la que se apoya, o con respecto a aquellas superficies con las que mantiene contacto. La magnitud de dicha fuerza depende del acabado o calidad de las superficies que interactúen. En otras palabras, mientras menor sea la calidad de las superficies en contacto, más grande será la fuerza de roce estática, y, por ende, mayor será la fuerza requerida para que se inicie el movimiento [1-2].

Fuerza de fricción cinética: es la que actúa entre dos cuerpos que presentan movimiento relativo de deslizamiento; por consiguiente, se opone a que el movimiento continúe. Al igual que la fuerza de roce estática, depende también de la calidad o grado de pulimento de las superficies en contacto.

Fuerza de fricción fluida: es la que se opone al movimiento de un objeto que está en contacto con algún fluido, el cual puede ser aire, agua, aceite, etc. Básicamente depende de dos factores: la velocidad del objeto y su forma.

La fuerza de fricción estática se define de la siguiente manera:

$$F_{fe} \leq \mu_e F_N \quad (19.1)$$





Donde:

F_{fe} : fuerza de fricción estática

μ_e : coeficiente de fricción estática

F_N : fuerza normal

La desigualdad en la ecuación indica que la fuerza de fricción estática es una fuerza de reacción y fluctúa desde cero hasta un máximo igual a " $\mu_e F_N$ ". Una vez que se incremente la magnitud de F de la figura anterior hasta alcanzar dicho valor, la masa M saldrá del estado de reposo y por consiguiente comenzará a actuar la fuerza de fricción cinética.

Ahora bien, la fuerza de fricción cinética se define como:

$$F_{fc} = \mu_c F_N \quad (19.2)$$

Donde:

F_{fc} : fuerza de fricción cinética

μ_c : coeficiente de fricción cinética

F_N : fuerza normal

Tanto la fuerza de fricción cinética como la estática dependen de la fuerza normal. Se diferencian esencialmente en que la primera es constante. Por otro lado, es importante destacar que las expresiones 19.1 y 19.2 no son de naturaleza vectorial, puesto que ambas fuerzas de fricción son perpendiculares a la fuerza normal.

La fuerza normal (F_N) es la que se ejercen mutuamente los cuerpos que están en contacto y su dirección es perpendicular a la superficie común de contacto. En el diagrama de cuerpo libre de M , mostrado en la figura 19.1b, se observa que la dirección de F_N es la positiva del eje y , debido a que la misma representa la reacción de la superficie en la que se apoya dicha masa.

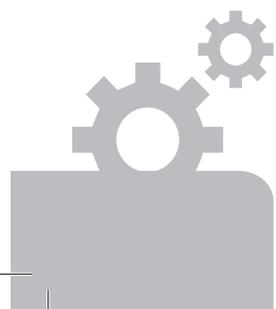




Tabla 19.1. Coeficientes de rozamiento o fricción para diversos tipos de materiales

Superficies en contacto	Coefficiente de fricción estática (μ_e)	Coefficiente de fricción cinética (μ_c)
teflón-acero	0,04	0,04
teflón-teflón	0,04	0,04
vidrio-madera	0,20	0,25
madera-cuero	0,50	0,40
madera-madera	0,70	0,40
aluminio-acero dulce	0,61	0,47
acero duro-acero duro	0,78	0,42
hierro fundido-hierro fundido	1,10	0,15
caucho-cemento	1,0	0,8
goma sobre sólidos	1-4	1

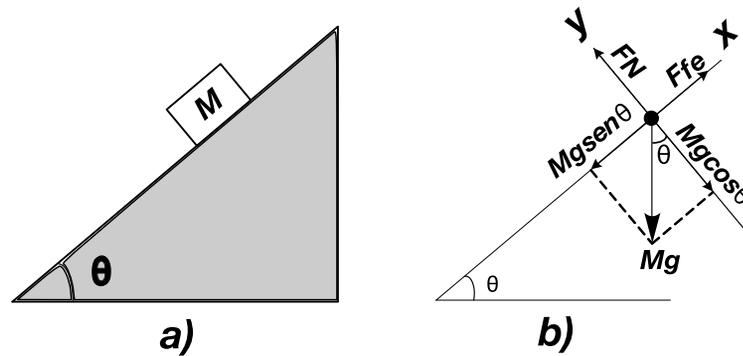
En relación con el coeficiente de fricción, vale señalar que su valor depende de las dos superficies que estén en contacto, y se obtiene de forma experimental [1-2]. En la tabla 19.1, se proporcionan una serie de valores para μ_e y μ_c ; se puede apreciar que usualmente el primero es mayor que el segundo, razón por la cual la fuerza de fricción estática generalmente es mayor que la fuerza de fricción cinética. Se presentan algunas excepciones como en superficies de acero-teflón y teflón-teflón, donde ambos coeficientes son iguales. Otro aspecto característico es que tanto el coeficiente de fricción estático como el cinético son corrientemente menores que uno, siendo el hierro fundido sobre el hierro fundido y la goma sobre sólidos una excepción. He allí la razón por la que se cubren de goma las bases o patas de algunos objetos que, por cuestiones de operación o trabajo, deben mantenerse en reposo.





Ángulo de rozamiento

Figura 19.2. Masa M en un plano inclinado con un ángulo de inclinación crítico



Al considerar el deslizamiento de un cuerpo sobre un plano inclinado, se observa que, al variar la inclinación de dicho plano, el objeto inicia el movimiento al alcanzarse un ángulo de inclinación crítico. Esto es debido a que, al aumentar la inclinación, se reduce paulatinamente la magnitud de la componente perpendicular del peso (que viene a ser igual a la fuerza normal), lo que disminuye consecuentemente la fuerza de fricción estática.

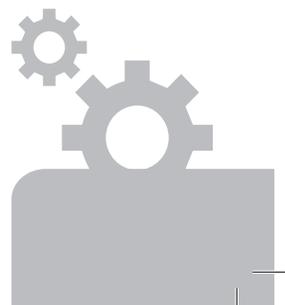
Para calcular el coeficiente de fricción estática a partir de la información contenida en la tabla 19.1, se considera que existe equilibrio tanto en la dirección x como en y, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{fe} - Mg \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow F_{fe} = Mg \operatorname{sen} \theta \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_N - Mg \operatorname{cos} \theta = 0 \Rightarrow F_N = Mg \operatorname{cos} \theta\end{aligned}$$

$$\text{Por definición: } F_{fe} = \mu_e F_N \Rightarrow \mu_e = \frac{F_{fe}}{F_N} = \frac{Mg \operatorname{sen} \theta}{Mg \operatorname{cos} \theta} = \operatorname{tg} \theta$$

$$\mu_e = \operatorname{tg} \theta \quad (19.3)$$

Así pues, para estudiar el rozamiento entre dos materiales que se encuentran en un plano inclinado, se debe disponer de un mecanismo o sistema que permita inclinar el plano de forma progresiva hasta que se observe que el cuerpo comience a deslizarse, siendo la tangente de ese ángulo el valor del coeficiente de rozamiento entre los dos materiales considerados.





Equipos y materiales

- Caja de madera
- Un juego de pesas
- Polea, hilo
- Una plancha de madera
- Un nivel
- Una portapesas
- Un dinamómetro
- Una prensa
- Un plano de inclinación variable
- Papel, cartón o cartulina

Montaje de la práctica

Figura 19.3. Montaje para la práctica de fuerza de roce estático en un plano horizontal empleando portapesas

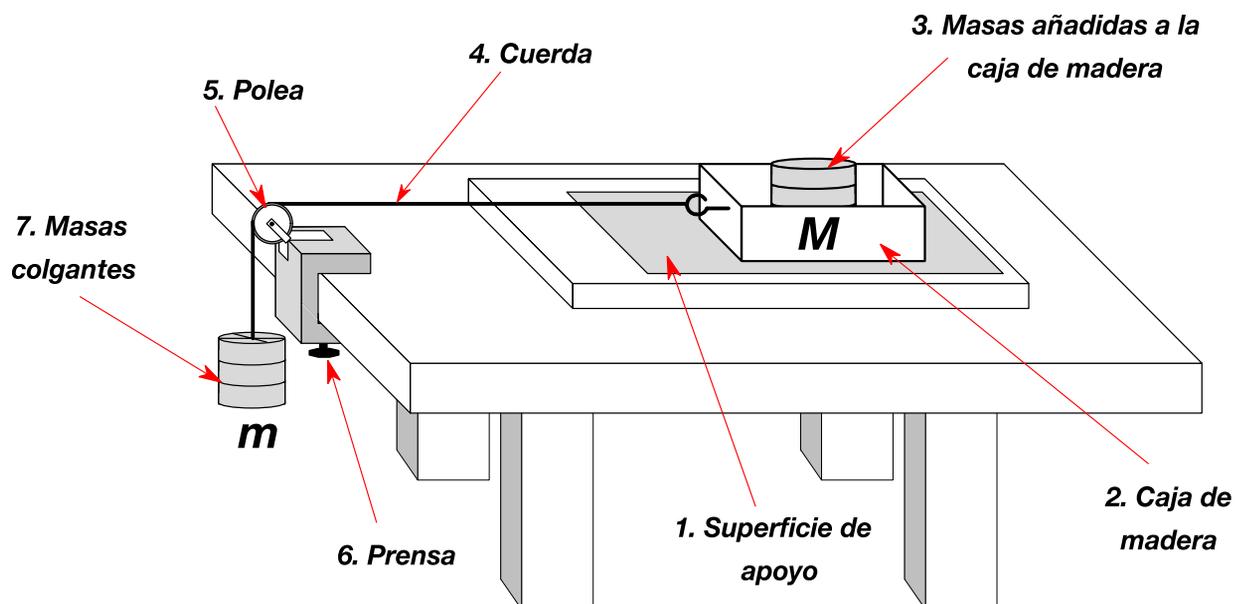




Figura 19.4. Montaje para la práctica de fuerza de fricción estática en un plano horizontal; empleando dinamómetro

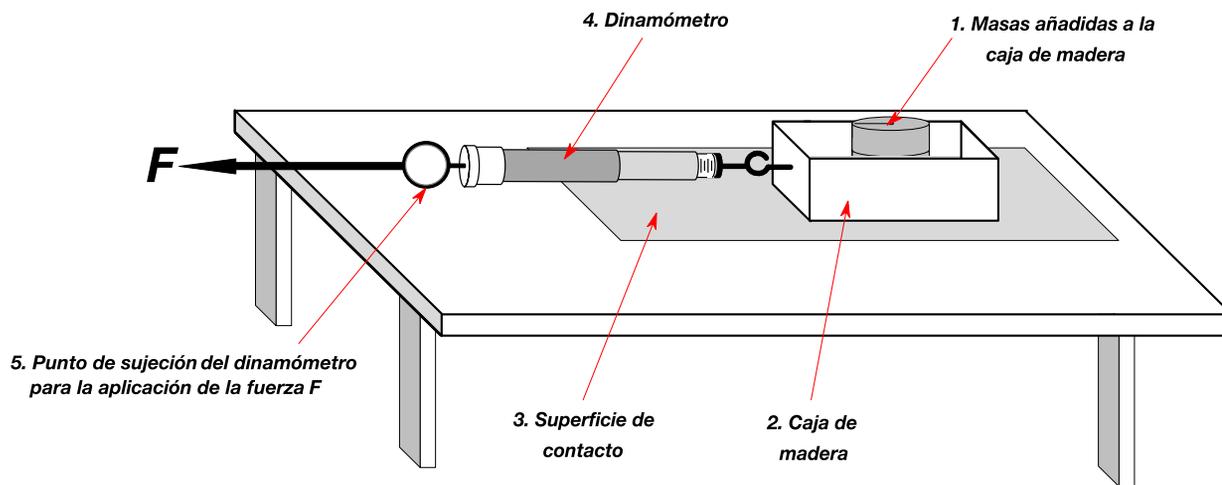
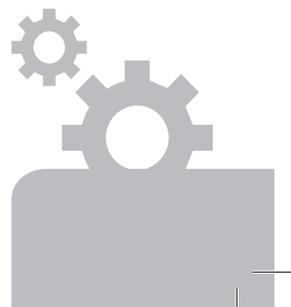
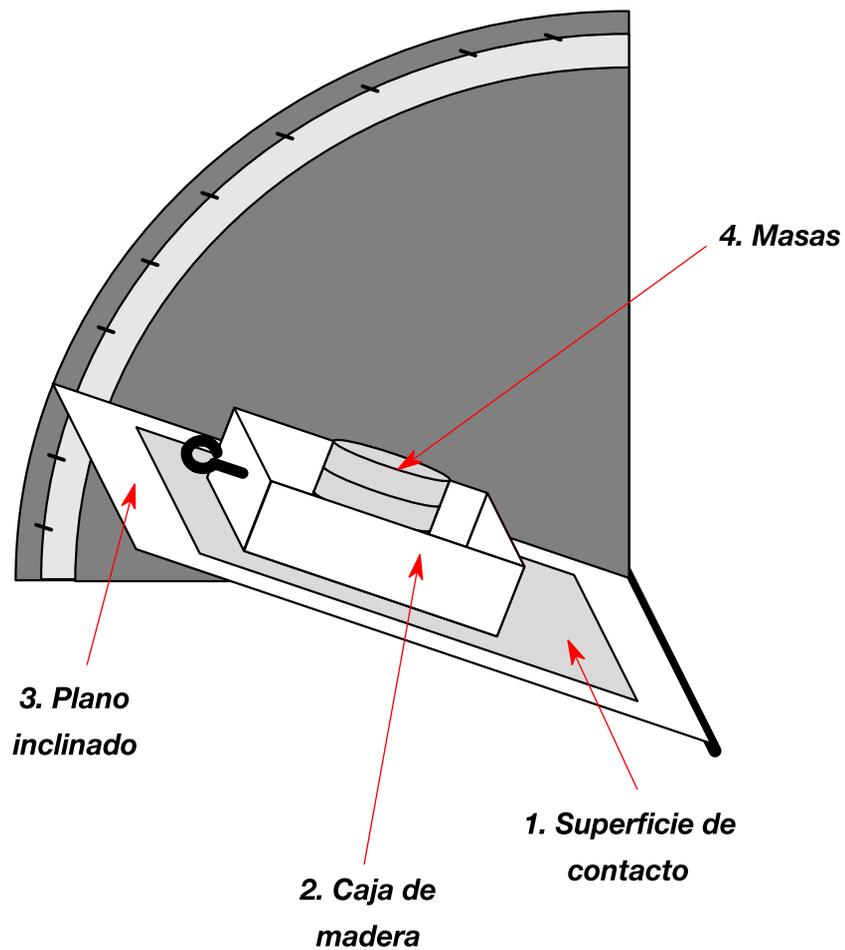


Figura 19.5. Montaje para el estudio de la fuerza de roce estática en el plano inclinado





Procedimiento para la recolección de los datos

Parte I (utilizando portapesas)

1. Observa el montaje de la práctica (figura 19. 3) y atiende a las instrucciones del profesor.
2. Elabora la tabla para el registro de los datos (tabla 19. 2).
3. Coloca una pesa de 100 g en la caja de madera.
4. Comienza a colgar masas en el portapesas, justo hasta que la caja salga del reposo. Registra el valor de m_1 obtenido y repite dos veces más la experiencia para la misma pesa colocada en la caja.
5. Agrega 100 g más a la caja y repite el paso 4, hasta que las pesas agregadas a la caja alcancen el valor de 1000 g.

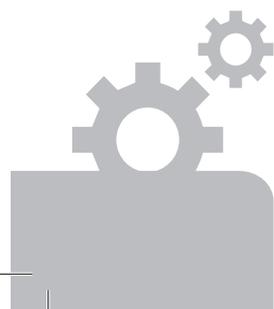
Tabla 19.2. Modelo de tabla para el registro de datos obtenidos en la parte I

MT	m_1	m_2	m_3	m_{promedio}

MT = masa añadida a la caja + masa de la caja

Parte I.II (utilizando dinamómetro)

1. Observa el montaje de la práctica (figura 19.4) y atiende a las instrucciones del profesor.
2. Elabora la tabla para el registro de los datos (tabla 19 3).
3. Coloca una pesa de 100 g en la caja de madera.
4. Conecta el dinamómetro a la caja, sujétalo y comienza a halarlo lentamente justo hasta que la caja salga del reposo. Identifica la magnitud de la fuerza





con la que se inició el movimiento y regístrala en el cuadro elaborado. Repite dos veces más la experiencia para la misma pesa colocada en la caja, registrando las magnitudes respectivas de las fuerzas. Garantiza que el dinamómetro mantenga una posición horizontal, mientras se aplica la fuerza F .

5. Agrega 100 g más a la caja y repite el paso 4. Continúa incrementando de 100 en 100 gramos hasta que las pesas agregadas a la caja alcancen el valor de 1000 g.

Tabla 19.3. Modelo de tabla para el registro de datos obtenidos en la parte I

MT	F_1	F_2	F_3	F_{promedio}

MT = masa añadida a la caja + masa de la caja

Parte II

1. Observa el montaje de la práctica (figura 19.5) y atiende a las instrucciones del profesor.
2. Coloca la caja empleada en la primera parte de la práctica sobre un plano de inclinación variable, cuidando que la superficie de apoyo del plano inclinado sea del mismo material que el que se empleó en la parte I.
3. Ubica la caja sobre el plano de inclinación variable, cuando este se encuentre en posición horizontal.
4. Aumenta gradualmente la inclinación del plano y toma nota del ángulo θ en el que la caja comienza a moverse.
5. Repite tres veces la experiencia para cada una de las pesas M consideradas en la experiencia anterior, cuidando que las mismas no se desplacen dentro de la caja.
6. Registra los datos en la tabla que se muestra a continuación.

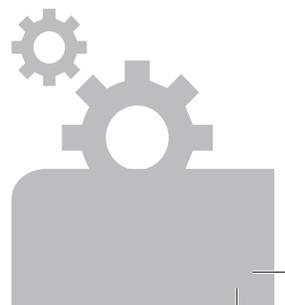
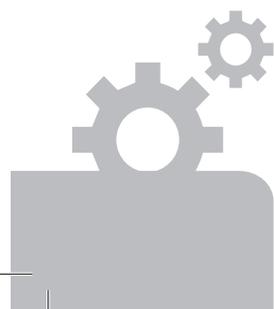




Tabla 19.4. Modelo de tabla para el registro de datos obtenidos en la parte II

MT	θ_1	θ_2	θ_3	θ_{promedio}

MT = masa de la caja + valor de las pesas anadidas a la caja; θ_1 , θ_2 , θ_3 : ángulos en que se produce el desplazamiento de la caja.

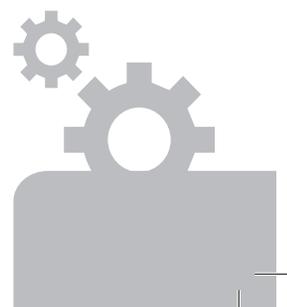
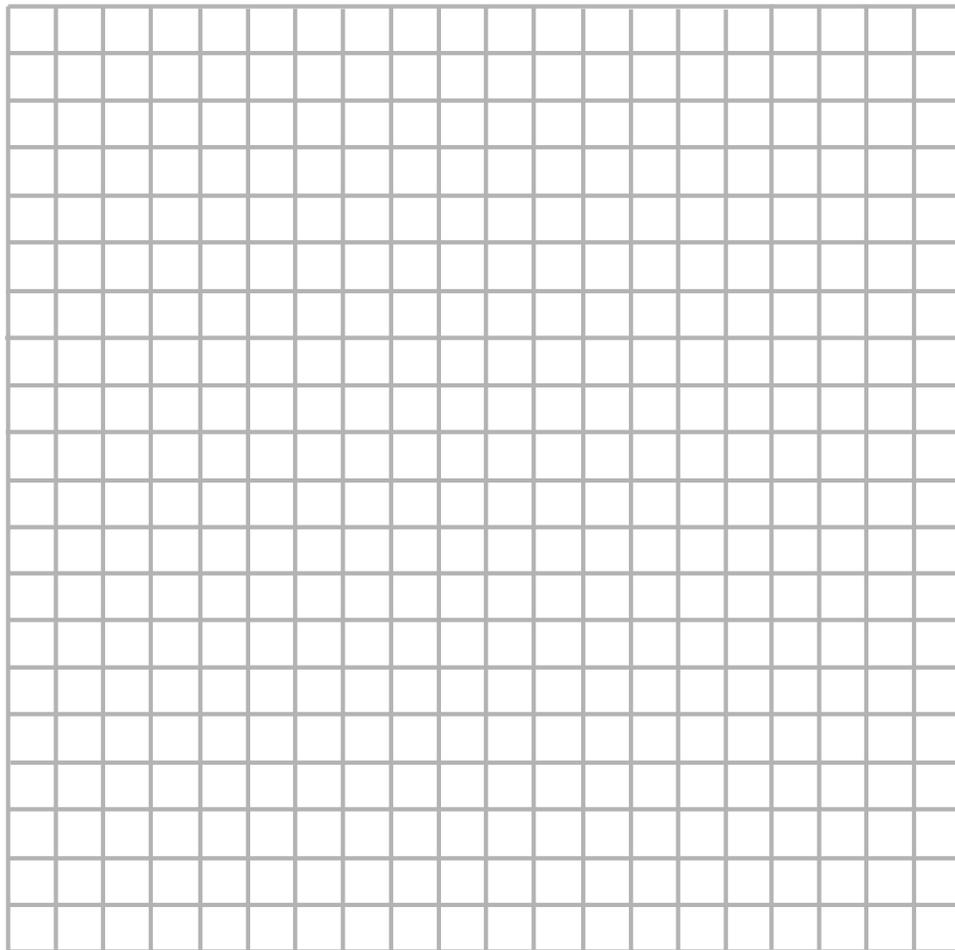




Cálculos

1. Tomando en cuenta la tabla 19.4, calcula el coeficiente de fricción y su gráfica respecto a los dos casos expuestos del presente laboratorio.

Figura 19.6. Gráfica del coeficiente de fricción





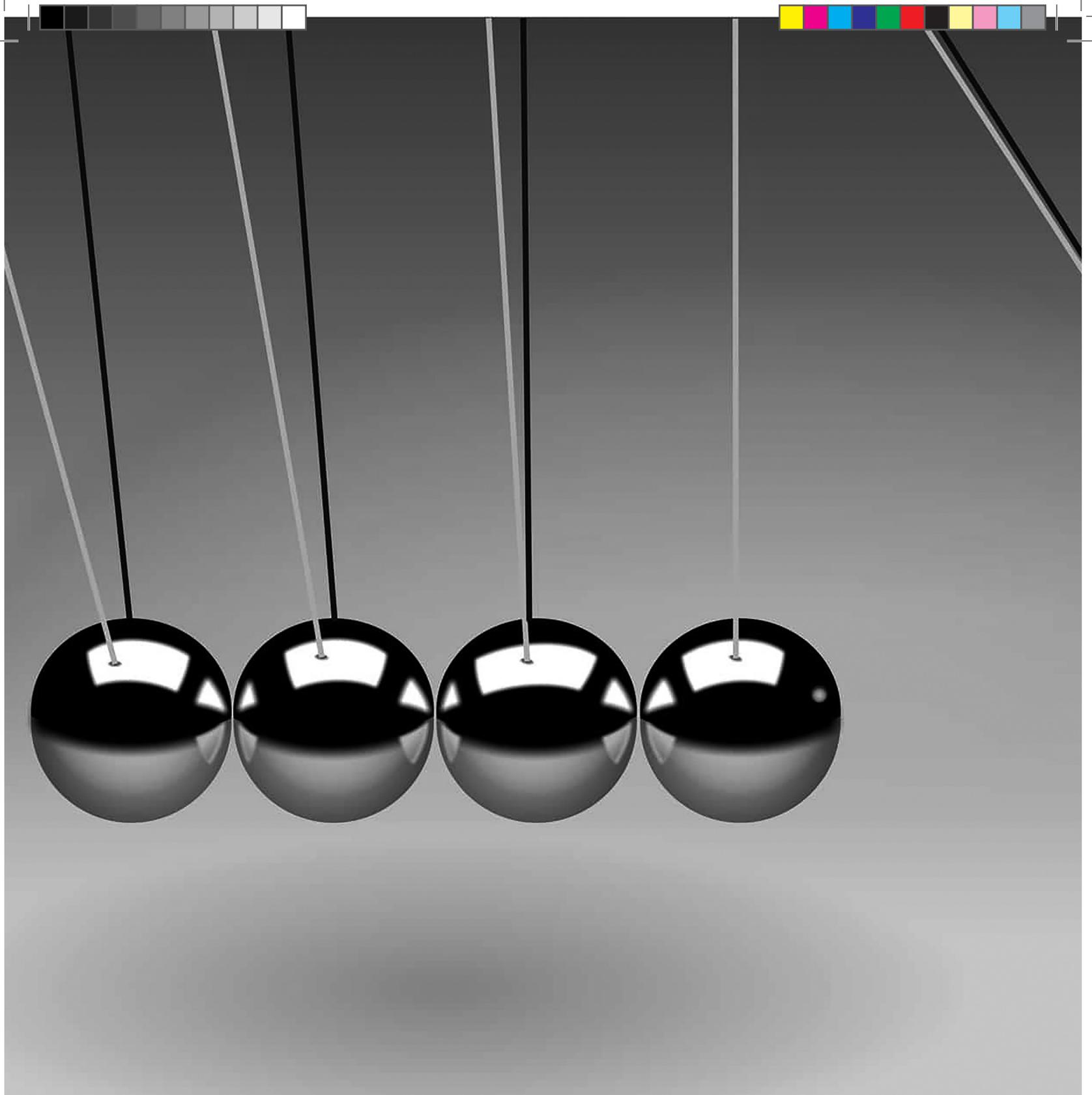
Características del informe técnico

El informe técnico deberá incluir los siguientes elementos [3]:

- Portada
- Introducción
- Fundamentación teórica
- Procedimientos
- Cálculos y resultados
- Conclusiones
- Referencias



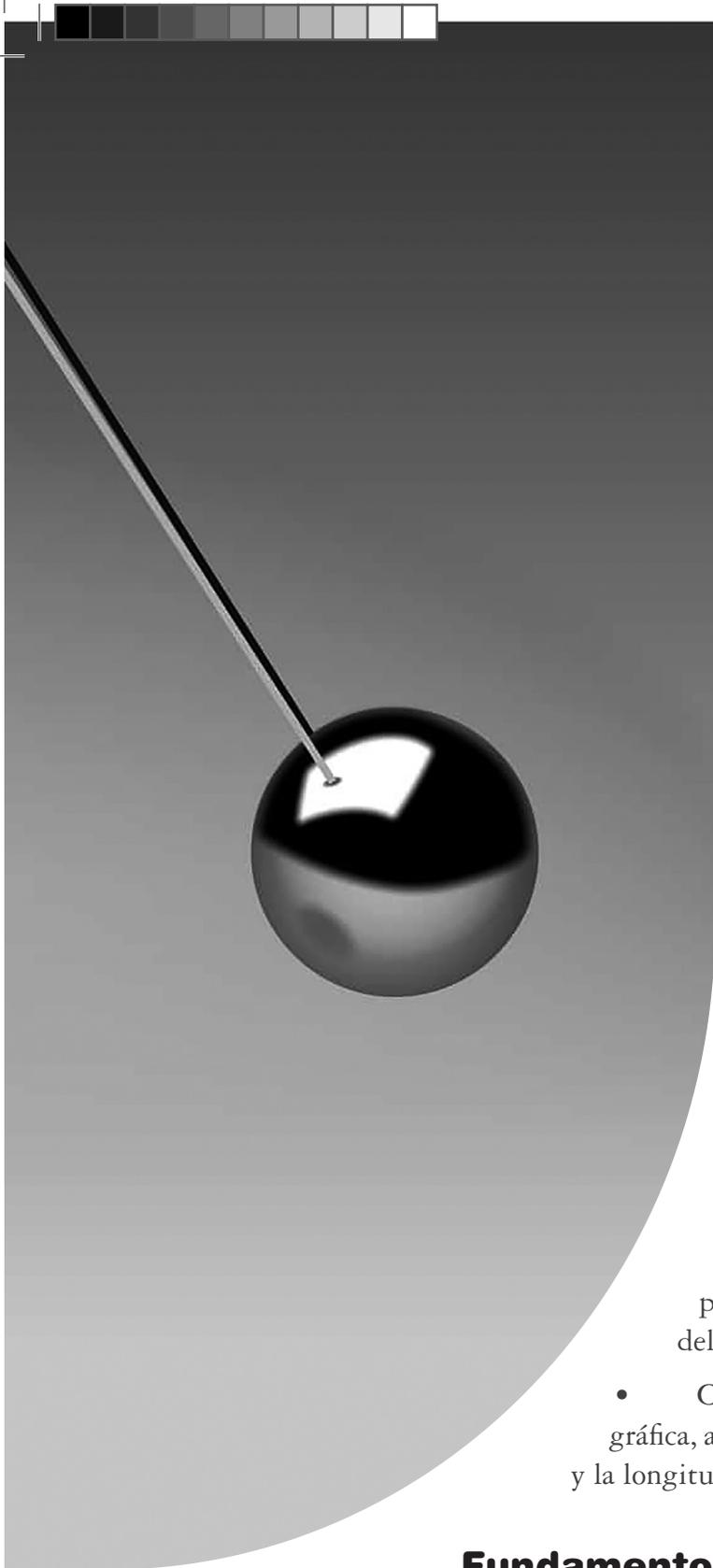




2

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en los capítulos previos
- ▶ Conoceremos una aplicación de laboratorio sobre caída libre
- ▶ Tomaremos datos experimentales



Práctica 2

Péndulo simple

Objetivo general

Calcular la aceleración de gravedad a través de los parámetros medidos en el estudio del péndulo simple.

Objetivos específicos

- Calcular la aceleración de gravedad en forma analítica, a partir de los parámetros del estudio del movimiento del péndulo simple.
- Calcular la aceleración de gravedad de forma gráfica, a partir de la relación lineal entre el período y la longitud del péndulo.

Fundamentos teóricos

Un péndulo simple puede definirse como una partícula de masa m suspendida del extremo de un hilo inextensible de longitud l , conocido como punto O , cuya masa se considera despreciable (figura 20.1) [1].

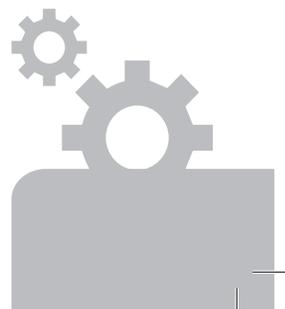
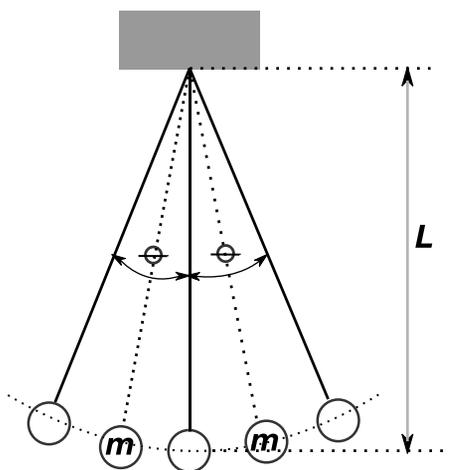




Figura 20.1. Representación esquemática de un péndulo simple



Si la partícula se desplaza a una posición θ_0 (ángulo que forma el hilo con el eje vertical) y luego se suelta, el péndulo comienza a oscilar [2] con un período T como se muestra en la figura 19.4. El período es el tiempo que tarda la masa en hacer un ciclo de su trayectoria.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (19.4)$$

Donde l es la longitud del hilo y g es la aceleración de la gravedad, que en esta práctica se considerará $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

La ecuación 19.4 solo es válida si el ángulo de desplazamiento θ es menor a 15° .

El péndulo describe una trayectoria circular, un arco de una circunferencia de radio r . En esta práctica, no estudiaremos su movimiento en la dirección tangencial ni en la dirección normal.

Para el cálculo analítico de la gravedad se considerarán la ecuación 19.4 y las mediciones realizadas en el proceso práctico [1].

Para el cálculo gráfico de la gravedad, es necesario un análisis de la siguiente ecuación. Se debe tener en cuenta que la longitud l del péndulo es proporcional al cuadrado del período T . Así pues, de esta ecuación, se puede obtener la ecuación 19.5, que permite entonces hacer la comprensión de la gravedad en forma gráfica.

$$l = g \frac{T^2}{4\pi} \quad (19.5)$$



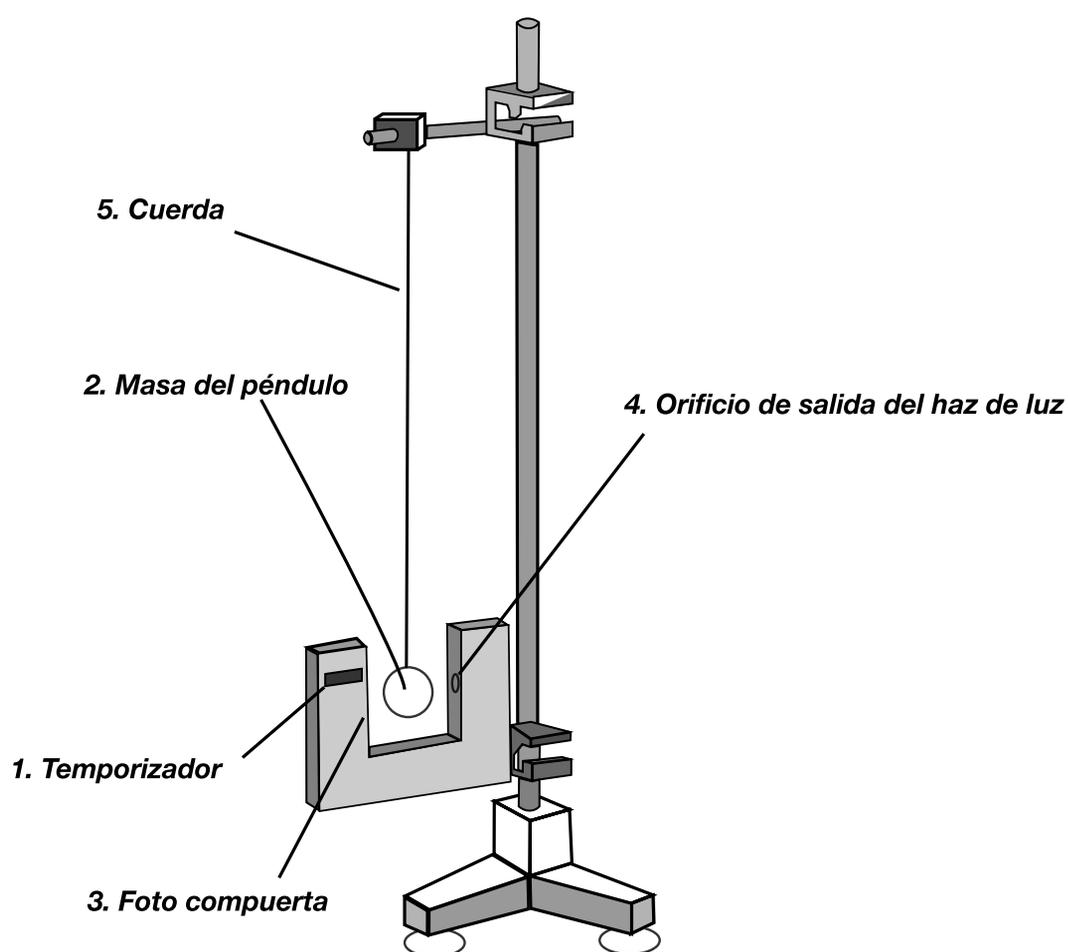


Equipos y materiales

- Temporizador o cronómetro
- Péndulos de varias longitudes (el diámetro de la esfera del péndulo debe ser menor a $30,00 \pm 0,05$ mm).
- Hilos de varias longitudes crecientes de cinco en cinco milímetros

Montaje de la práctica

Figura 20.2. Esquema del montaje de la práctica de péndulo simple con temporizador





Procedimiento para la recolección de los datos

1. Realiza el montaje de la figura 20. 2.
2. Conecta el temporizador o ten encendido el cronómetro.
3. La longitud del péndulo estará determinada por la longitud del hilo más el radio de la esfera colgante (masa m).
4. Si utilizas un temporizador de fotocompuerta, debes verificar que esta se encuentra alineada verticalmente con la proyección del hilo que sostiene la esfera.
5. Utiliza una referencia en el eje vertical para verificar que la esfera atraviese este punto y poder medir el tiempo. En el caso de trabajar con fotocompuerta, deberás verificar que la esfera intercepte el haz luminoso por la parte central.
6. Para el experimento, deberás considerar pequeños ángulos; empieza desplazando la esfera un pequeño ángulo respecto a la vertical y suéltala luego. Registra el tiempo especificado por el temporizador o cronómetro.
7. Deberás registrar diferentes longitudes del hilo y para cada una deberás realizar tres mediciones de tiempo.
8. Deberás realizar el experimento para longitudes crecientes del hilo, desde 10 cm hasta 70 cm, con diferencias de 5 cm.
9. Registra estos valores en la tabla 20. 1.





Tabla 20.1. Registro de longitudes y tiempos

L (cm)	T ₁ (s)	T ₂ (s)	T ₃ (s)
10			
15			
20			
25			
30			
35			
40			
45			
50			
55			
60			
65			
70			

Actividades

1. Tomando en cuenta la tabla 1, calcule la aceleración de gravedad con la ecuación 19.4.
2. Realiza la tabla 20.2 y calcula la aceleración de gravedad tomando en cuenta la ecuación 19.5.

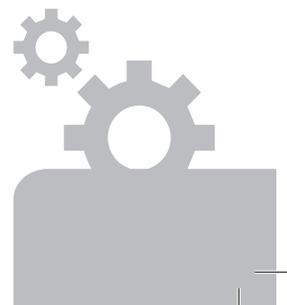




Tabla 20.2. Datos para el cálculo de la aceleración de gravedad en forma gráfica

L (cm)	\bar{T}^2 (s)
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
55	
60	
65	
70	

3. Realiza el cálculo de la aceleración de gravedad de forma gráfica y justifica cada paso con los procedimientos correctos.
4. Realiza la gráfica respectiva en el siguiente recuadro.

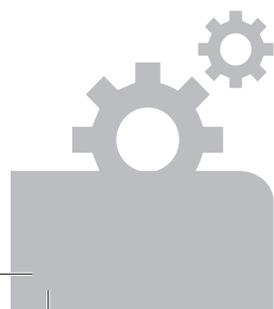
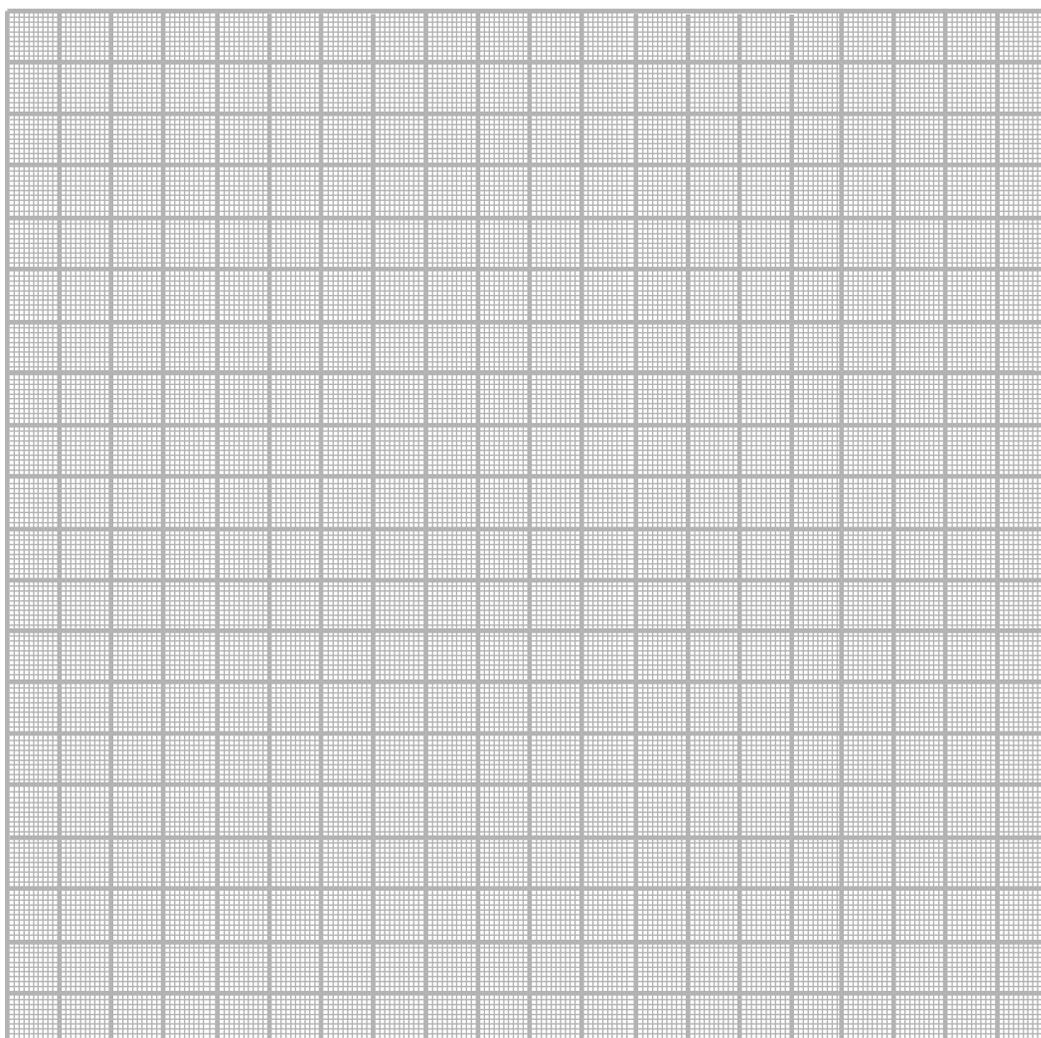




Figura 20.3. Aceleración de gravedad de forma gráfica



5. Tomando en cuenta el trabajo desarrollado por [3], [4], [5] y [6], atiende a lo siguiente:
 - a. Realiza la representación del valor relativo de las fuerzas que actúan sobre la masa oscilante [3].
 - b. Describe el comportamiento asintótico para el péndulo simple [4].
 - c. Describe el comportamiento del período a partir de la ecuación descrita para el período exacto [6].
 - d. Considerando las nuevas tecnologías como herramienta para la enseñanza de la física, analiza la aplicación descrita como MYUDUTU [5] para comprender el comportamiento del péndulo simple a partir de la misma y expón las ventajas y desventajas de dicha aplicación.





Características del informe técnico

El informe técnico deberá incluir los siguientes elementos [7]:

- Portada
- Introducción
- Fundamentación teórica
- Procedimientos
- Cálculos y resultados
- Conclusiones
- Referencias

Referencias

[1] H. D. Young y R. A. Freedman, eds. *Sears-Zemansky: Física universitaria, volume 1*. Ciudad de México, Pearson Educación, 2009.

[2] Universidad del País Vasco. «El péndulo simple» [en línea]. Disponible en <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm>. [Último acceso: 19/03/2019].

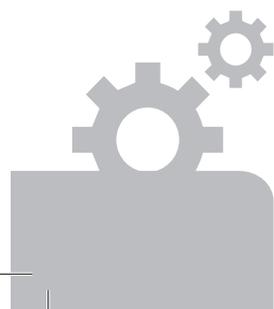
[3] J. Santos, A. Gras-Marti y V. Soler-Selva. «Recursos para la enseñanza del péndulo simple: imágenes, mediciones, simulaciones, guías didácticas», *Cad. Bras. Ens. Fís.*, vol. 22, n° 2, pp. 165-189, 2005.

[4] F. Chaos Urdampilleta y C. Chao. «Comportamiento asintótico para el período del péndulo simple», *Rev. mex. fis.*, vol. 48, n° 6, 2002.

[5] E. Aveleyra, D. Racero y L. Chiabrando. «Desarrollo de material educativo para estudiar un péndulo simple con MYUDUTU», *Rev. Edutec*, vol. 38, n° 38, 2011.

[6] D. Amrari, P. Paradis y M. Baudin. «Approximation expressions for the large-angle period of a simple pendulum revisited», *Rev. Mex. Fís.*, vol. 54, n° 1, pp. 59-64, 2008.

[7] C. Guerra-Vela, N. Pinto y J. González-Sánchez. *Manual de laboratorio para física universitaria*. Santurce, Universidad de Puerto Rico, 2008.







Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en los capítulos previos
- ▶ Conoceremos una aplicación de laboratorio sobre momento lineal
- ▶ Tomaremos datos experimentales



Práctica 3

Caída libre

Objetivo general

Determinar la aceleración de la gravedad, a través del estudio del movimiento de caída libre.

Objetivos específicos

- Calcular, sobre la base del modelo teórico de caída libre y los datos recolectados, la aceleración de la gravedad.
- Determinar, sobre la base del modelo teórico de caída libre y los datos recolectados, la aceleración de la gravedad en forma gráfica.

Fundamentos teóricos

La caída libre es un movimiento vertical que se produce debido a la influencia exclusiva de la gravedad, que direcciona a todos los objetos hacia el centro de la Tierra y cuyo valor depende del lugar en el que se encuentren [1-2] (figura 21.1).

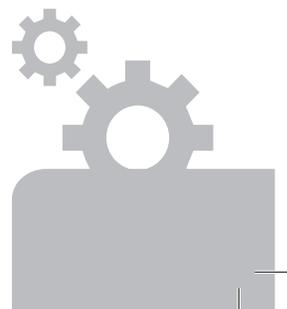
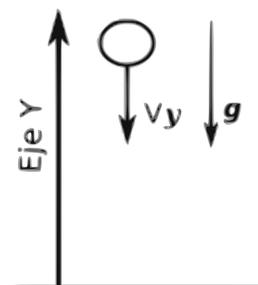




Figura 21.1. Esquema del movimiento de caída libre de un objeto



La ecuación del movimiento de un cuerpo a lo largo del eje x , cuando la aceleración es constante, viene dada por:

$$x - x_0 = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (19.6)$$

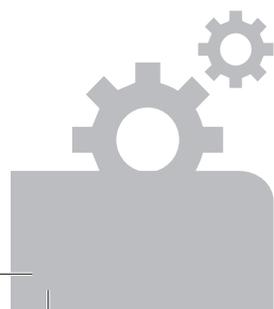
Donde x es la posición final del cuerpo, x_0 es la posición inicial, a es la aceleración y t es el tiempo transcurrido al ir desde la posición x_0 hasta x . Vale destacar que la posición es un vector y lleva implícito la consideración de un marco de referencia [1-2].

Ahora bien, cuando el cuerpo se mueve a lo largo del eje y , la expresión 19.6 cambia a la siguiente forma:

$$y - y_0 = V_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (19.7)$$

Siendo g la aceleración de la gravedad, cuya dirección es la negativa del eje y , de allí el signo negativo en 19.7. Vale también añadir que el movimiento de caída libre es aquel que se produce dejando caer un cuerpo desde determinada posición respecto al suelo o nivel de referencia, considerando la ausencia de roce entre el objeto y el ambiente circundante. Se puede demostrar, sobre la base de la figura 21.2, que, para este tipo de movimiento, la relación entre la distancia recorrida por el objeto d , en su movimiento de caída libre [3], viene dada en función del tiempo a través de la siguiente expresión:

$$d = \frac{1}{2} g t^2 \quad (19.8)$$



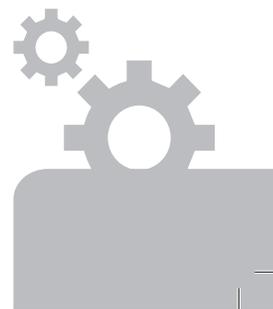
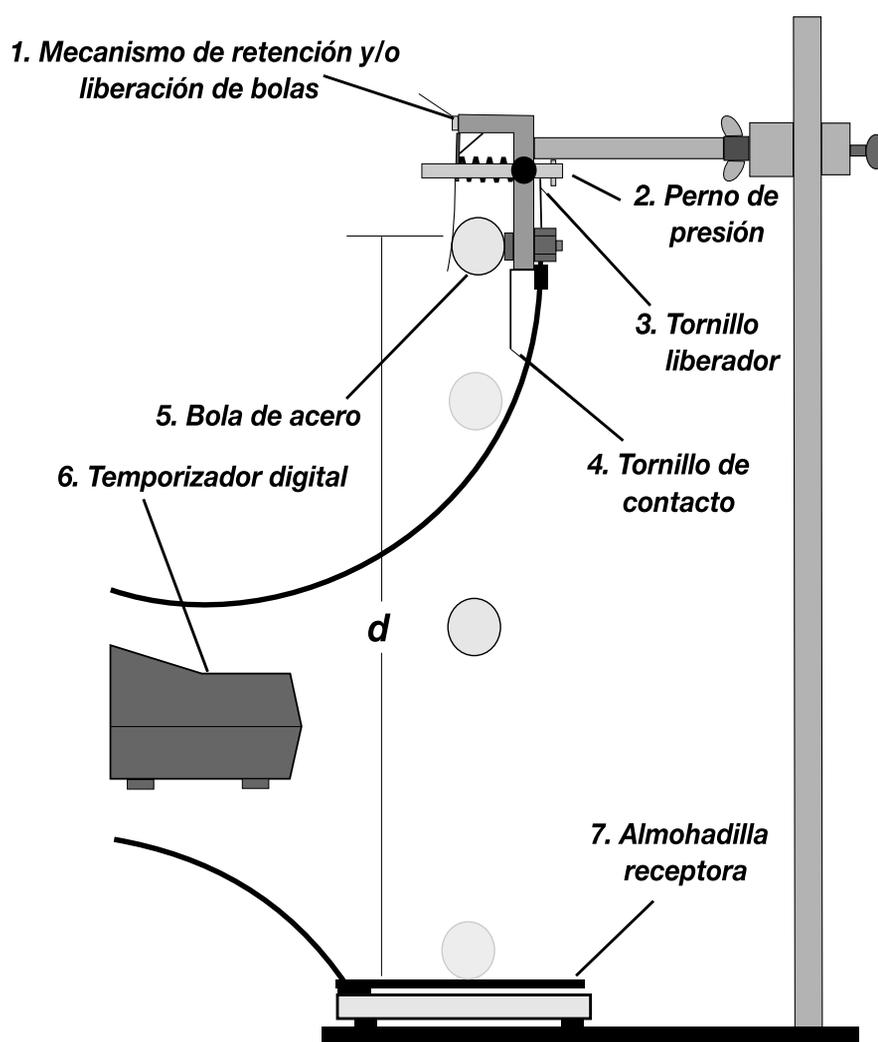


Equipos y materiales

- Adaptador de caída libre modelo (ME-9207B) PASCO
- Base universal
- Varilla de acero de 2 m
- Esferas de acero de 13 y 16 mm de diámetro
- Temporizador (ME-9215A)

Montaje de la práctica

Figura 21.2. Esquema del montaje de la práctica de caída libre





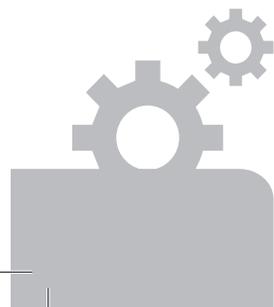
Procedimiento para la recolección de los datos

1. Presta atención a las orientaciones del profesor respecto a la forma de llevar a cabo la práctica; pide aclaraciones en caso de ser necesario.
2. Inspecciona el montaje para la realización de la práctica (figura 21.2). Verifica que el temporizador esté debidamente conectado a la fuente de energía eléctrica.
3. Enciende el temporizador (ME-9215) y fíjalo en la posición GATE.
4. Coloca una bola en el mecanismo de retención y/o liberación de bolas.
5. Afloja el tornillo liberador para soltar la bola.
6. Verifica que la bola haya golpeado la almohadilla receptora aproximadamente en el centro, y que el temporizador haya medido el tiempo que tardó la bola en caer desde la altura prefijada.
7. Golpea suavemente la almohadilla receptora para reiniciar el temporizador.
8. Para comenzar el proceso de recolección de datos, fija la altura inicial, aproximadamente 2,00 m, como la altura desde la cual caerá inicialmente la bola; este será el primer valor de d .
9. Obtén 20 medidas de d reduciéndolo de 5 cm en 5 cm a partir del valor inicial, midiendo a su vez el tiempo de caída para cada altura en particular. Para cada valor de d , realiza tres mediciones de tiempo.
10. Para el registro de los datos obtenidos de la experiencia, construye una tabla similar a la 21.1.

Emplea las bolas o esferas de acero sugeridas por el profesor.

Tabla 21.1. Modelo de tabla para registro de datos

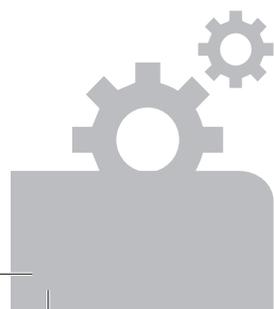
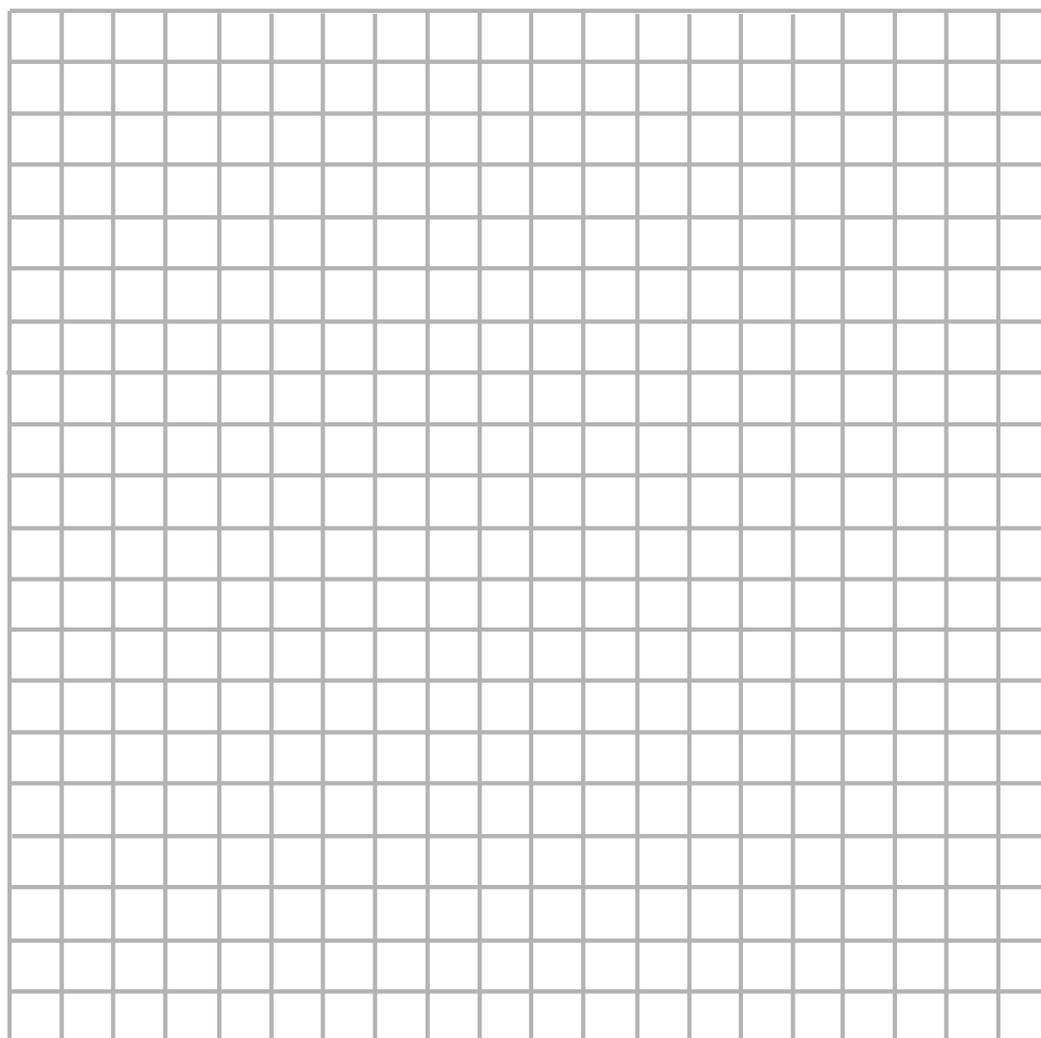
d (m)	t_1	t_2	t_3	t_{promedio}
.				
.				
.				





- Tomando en cuenta la ecuación 19.7 calcula la aceleración de gravedad de forma gráfica y justifica cada paso con los procedimientos correctos. Realiza la gráfica respectiva en el siguiente recuadro.

Tabla 21.3. Aceleración de gravedad de forma gráfica





Características del informe técnico

El informe técnico deberá incluir los siguientes elementos [3]:

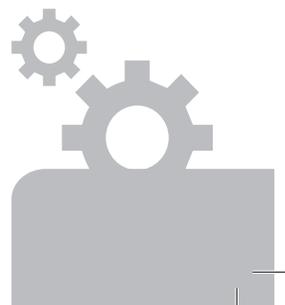
- Portada
- Introducción
- Fundamentación teórica
- Procedimientos
- Cálculos y resultados
- Conclusiones
- Referencias

Referencias

[1] Pasco Scientific. *Instruction Manual and Experiment Guide for the PASCO scientific*. Ciudad de México, PASCO, 2006.

[2] H. D. Young y R. A. Freedman, eds. *Sears-Zemansky: Física universitaria, volumen 1*. Ciudad de México, Pearson Educación, 2009.

[3] J. Marcano. *Manual de laboratorio de física I*. Puerto Ordaz, Venezuela. Instituto Universitario Politécnico Experimental Guayana, Departamento de estudios Generales, Sección de Física, 1985.





4!

Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en los capítulos previos
- ▶ Conoceremos una aplicación de laboratorio sobre la conservación de la energía mecánica
- ▶ Tomaremos datos experimentales



Práctica 4

Conservación de momento lineal

Objetivo general

Verificar el principio de conservación del momento lineal.

Objetivos específicos

- Comprobar el principio de la conservación del momento lineal en una dimensión.
- Confirmar el principio de la conservación del momento lineal en dos dimensiones.

Fundamentos teóricos

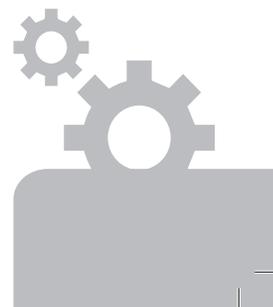
Conservación del momento lineal

Sea un sistema formado por n partículas donde la masa de cada una de ellas se identifica como m_i y la masa total (M) es:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (19.9)$$

Asimismo, el centro de masas (r_{cm}) del sistema de partículas, vendrá dado por:

$$r_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i \quad (19.10)$$





Para encontrar la velocidad del centro de masas (V_{cm}) del sistema de partículas, se procederá a derivar la expresión 19.10 respecto al tiempo; obteniéndose:

$$V_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i V_i \quad (19.11)$$

Por su parte, el producto $m_i V_i$ recibe el nombre de cantidad de movimiento lineal o momentum lineal (p_i) de la partícula i y $\sum_{i=1}^n m_i V_i$ es el momentum lineal total del sistema de partículas. Por lo tanto, la ecuación 19.11 puede expresarse en términos del momentum lineal de la siguiente manera:

$$M V_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i V_i \Rightarrow P_{cm} = \sum_{i=1}^n P_i \quad (19.12)$$

Partiendo de 19.11, la aceleración del centro de masas (a_{cm}) del sistema de partículas es:

$$a_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i a_i \quad (19.13)$$

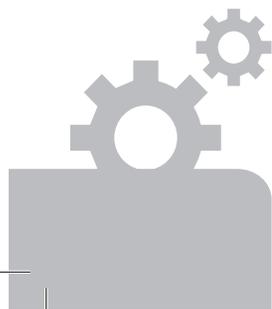
Donde a_i es la aceleración de la partícula i . Por otra parte, la ecuación 19.13 puede expresarse en términos de la fuerza neta como:

$$F_{neta} = \sum_{i=1}^n F_i \quad (19.14)$$

Donde F_i es la fuerza externa que actúa sobre la partícula i .

Ahora bien, si la fuerza neta externa sobre el sistema de partículas es cero, es decir, si el sistema está aislado de 19.13 y 19.14, se deduce que a_{cm} es cero. De acuerdo con esto, se puede afirmar que la velocidad del centro de masas es constante. De 22.4 y la condición anterior se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n F_{iext} = 0 \Rightarrow M V_{cm} = \sum_{i=1}^n P_i = \text{constante} \quad (19.15)$$





En este sentido, la ecuación 19.15 enuncia lo siguiente: “Si la fuerza neta ejercida sobre un sistema de partículas es cero, la velocidad del centro de masas y el momento lineal total del sistema de partículas es constante (se conserva en el tiempo)”. Por otro lado, la ecuación 19.15 es equivalente a:

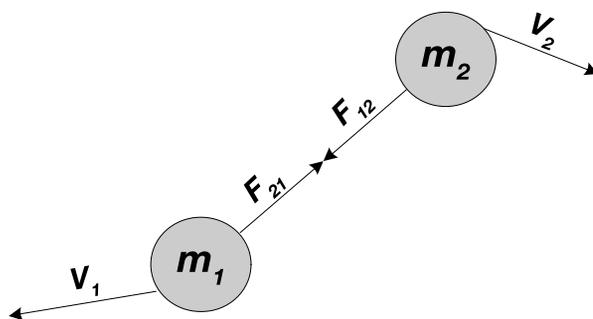
$$P_{1i} + P_{2i} + P_{3i} + \dots = P_{1f} + P_{2f} + P_{3f} + \dots \quad (19.16)$$

Conservación del momento lineal de un sistema de partículas

Considere un sistema formado por dos partículas que pueden interactuar mutuamente, pero que se encuentran aisladas del medio circundante [1-2]. Debido a la interacción, se generan fuerzas internas que propician el movimiento de ambas partículas. La partícula 1 se mueve por la acción de la fuerza F_{21} y la partícula 2 por la acción de la fuerza F_{12} . Por la tercera ley de Newton se cumplirá que:

$$F_{12} + F_{21} = 0 \quad (19.20)$$

Figura 22.1. Interacción de dos partículas aisladas



Ahora bien, si la masa es constante, se cumplirá que la derivada del momento lineal con respecto al tiempo es igual a la masa por la aceleración. Aplicando este principio para m_1 y m_2 de la figura 22.1 se tendrá respectivamente:

$$\frac{dp_1}{dt} = F_{21} \quad \text{y} \quad \frac{dp_2}{dt} = F_{12} \quad (19.21)$$





Al sustituir 22.10 en 22.9 se obtendrá:

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (p_1 + p_2) = 0 \Rightarrow p_1 + p_2 = \text{constante} \quad (19.22)$$

Así pues, el principio de conservación del momento lineal establece que el momento lineal total del sistema de partículas permanece constante cuando no actúan fuerzas externas; en otras palabras, cuando el sistema se encuentra aislado. Es necesario añadir también que el referido principio es independiente de la naturaleza de las fuerzas de interacción entre las partículas que integran el sistema aislado.

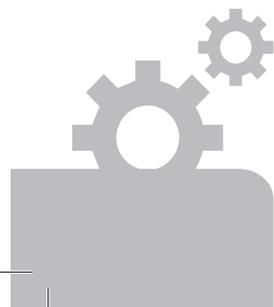
Colisiones

El término colisión se emplea para representar la situación en la que dos o más partículas interactúan durante un tiempo relativamente pequeño; se supone, como ya se acotó, que las fuerzas impulsivas debidas a la colisión son mucho más grandes que cualquier otra fuerza externa que pueda intervenir en el instante que dura la colisión [1-2].

Se distinguirán tres tipos de colisiones: perfectamente elásticas, inelásticas y perfectamente inelásticas. Vale señalar que la semejanza entre estos tres tipos de colisiones es que el momento lineal se conserva, es decir, que el momento lineal un instante antes de la colisión es igual al momento lineal un instante después de la colisión. También es importante aclarar que las frases «un instante antes de la colisión» y «un instante después de la colisión» se refieren a fracciones de tiempo muy pequeñas antes y después de la interacción. Ahora bien, además de la conservación del momento lineal, las colisiones perfectamente elásticas tienen la característica adicional de que la energía cinética se conserva. Esto quiere decir que la energía cinética del sistema antes de la colisión es igual a la energía cinética del sistema después de la colisión. Para aclarar, considérense dos objetos de masa m_1 y m_2 que colisionan en una dimensión (por ejemplo, el eje x):

Conservación del momento lineal

$$m_1 \mathbf{V}_{1i} + m_2 \mathbf{V}_{2i} = m_1 \mathbf{V}_{1f} + m_2 \mathbf{V}_{2f} \quad (19.23)$$





Conservación de la energía cinética

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{2f}^2 \quad (19.24)$$

Los términos en negritas de 19.23 indican que están en forma vectorial, mientras que, en 19.24, representan las magnitudes de las velocidades. Por ello es necesario asignar los signos correspondientes a las cantidades vectoriales de 19.23 para que la misma quede expresada como una ecuación escalar. Por ejemplo, si m_1 antes del choque se movía hacia la derecha y m_2 hacia la izquierda, y después del choque m_1 continúa moviéndose hacia la derecha mientras que m_2 cambia su dirección hacia la derecha, la ecuación 19.24 se transforma en:

$$m_1 \mathbf{V}_{1i} - m_2 \mathbf{V}_{2i} = m_1 \mathbf{V}_{1f} + m_2 \mathbf{V}_{2f} \quad (19.25)$$

Así pues, las ecuaciones 19.23 y 19.24 representan un sistema de ecuaciones que generalmente tiene dos incógnitas que puede ser resueltas. Como ejemplo de colisiones elásticas, se pueden considerar las de las bolas de billar, así como las ocurridas a nivel atómico.

En las colisiones inelásticas, el momento lineal se conserva. Sin embargo, la energía cinética no se conserva debido a que parte de dicha energía se transforma en energía térmica y en energía potencial elástica interna, cuando los cuerpos se deforman durante la colisión.

Por otro lado, cuando dos objetos colisionan y se quedan juntos después del choque, se dice que la colisión es perfectamente inelástica. Un ejemplo de ello lo constituye la incrustación de una bala en un cuerpo después de haber sido disparada, o el caso de los meteoritos cuando chocan con la Tierra u otro planeta.

Ejemplo de la conservación del momento lineal en las explosiones

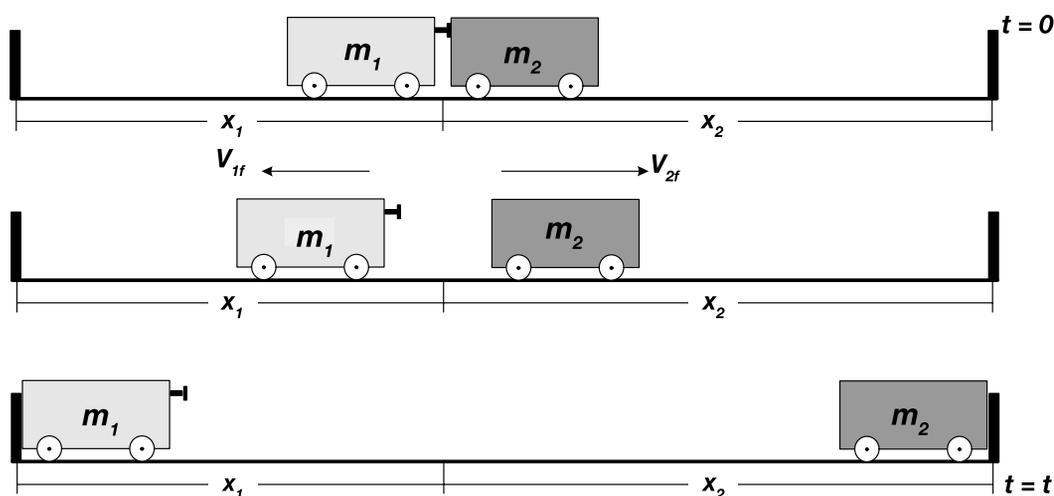
Supóngase que se tienen dos móviles de masas m_1 y m_2 inicialmente en reposo sobre un carril (figura 22.2). En el instante inicial $t = 0$, se activa un mecanismo de disparo que posee m_1 , el cual hace que m_2 salga impulsada hacia la derecha y m_1 hacia la izquierda con velocidades \mathbf{V}_{2f} y \mathbf{V}_{1f} respectivamente. Para el abordaje teórico del fenómeno, se considerará que se dispone de un sistema aislado





formado por los dos móviles, el cual es accionado por una fuerza interna, que es el mecanismo de disparo que posee el móvil de masa m_1 .

Figura 22.2. Esquema representativo de la explosión de dos móviles

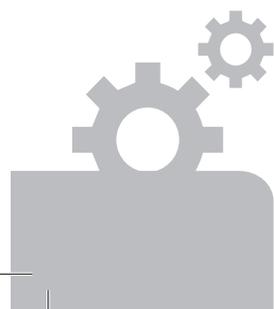


Dicho fenómeno se considera como una explosión; por consiguiente, la conservación del momento lineal se expresará de la siguiente manera: «El momento lineal del sistema antes de la explosión es igual al momento lineal del sistema después de la explosión». Como inicialmente ambos móviles se encuentran en reposo, la cantidad de movimiento lineal inicial del sistema es cero, y resulta la siguiente expresión:

$$0 = - m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} \quad (19.26)$$

El signo negativo del primer término de la derecha de la ecuación 19.26 obedece a que el móvil de masa m_1 se mueve hacia la izquierda después del choque. Para determinar la rapidez de ambos móviles se toma como referencia la figura 22.2, considerando que el tiempo que emplea m_1 en desplazarse x_1 es el mismo que emplea m_2 en desplazarse x_2 ; de allí que:

$$V_{1f} = \frac{x_1}{t} \quad \text{y} \quad V_{2f} = \frac{x_2}{t} \quad (19.27)$$





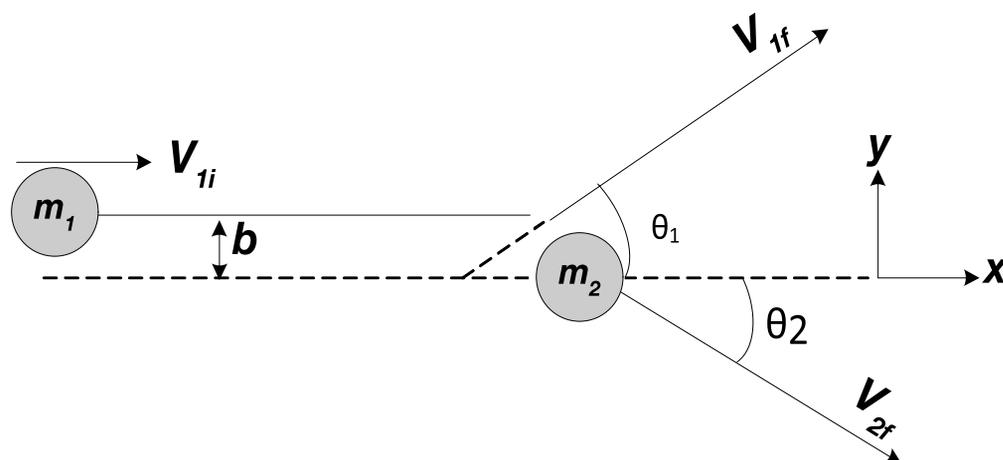
Al sustituir las expresiones de 19.27 en la ecuación 19.26, se obtendrá la siguiente relación:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2}{x_1} \quad (19.28)$$

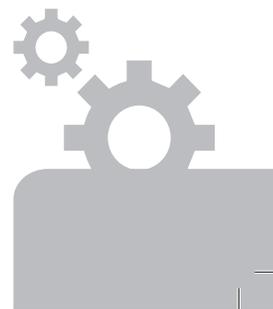
Choques bidimensionales

La conservación del momento y la energía también puede aplicarse a las colisiones en dos o tres dimensiones, siendo de suma importancia en estos casos la naturaleza vectorial del momento lineal. Los tipos de colisiones que se analizan con más frecuencia son aquellas en que una partícula llamada proyectil golpea a otra que se encuentra inicialmente en reposo (partícula blanco); o aquellas en que el momento inicial de las dos partículas están a lo largo de la misma línea (por lo regular, dirigidas una contra la otra). En ambos casos, si la colisión no es frontal, los momentos finales después de la colisión estarán en diferentes direcciones que las de los momentos iniciales. La colisión ocurrirá de hecho en dos dimensiones dado que las trayectorias de ambas partículas estarán en el plano definido por los momentos iniciales y finales.

Figura 22.3. Representación de una colisión bidimensional, con m_2 inicialmente en reposo



La figura 22.3 muestra la partícula m_1 (proyectil) dirigiéndose a lo largo del eje x hacia la partícula m_2 (blanco) que inicialmente está en reposo. Si se





trata, por ejemplo, de bolas de billar, m_1 golpea a m_2 y ambas se separan formando ángulos θ_1 y θ_2 con relación a la dirección original de m_1 en el eje x; y b recibe el nombre de parámetro de impacto. Este es la distancia perpendicular entre la línea de movimiento original del proyectil y una línea paralela a través del centro de la partícula blanco [1-2].

Aplicando las leyes de la conservación del momento lineal y de la energía, resulta:

$$m_1 V_1 = m_1 V_{1f} \cos\theta_1 + m_2 V_2 \cos\theta_2 \quad (19.29)$$

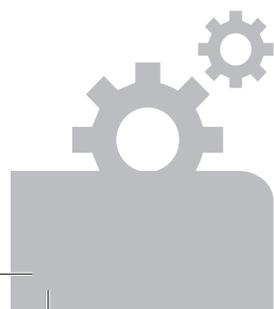
$$0 = m_1 V_1 \sin\theta_1 - m_2 V_2 \sin\theta_2 \quad (19.30)$$

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (19.31)$$

Como se dijo inicialmente en este apartado, cuando se trabaja en dos o tres dimensiones, cobra singular importancia la naturaleza vectorial del momento; de allí que la ecuación 22.18 corresponde a la conservación del momento en x y la 22.19, a la del momento en y. Esta última es cero antes del choque porque inicialmente el momento de las dos partículas estaba en la dirección del eje x. Vale recalcar que el sistema formado por las ecuaciones 19.29, 19.30 y 19.31 debe poseer como máximo tres incógnitas para poder ser resuelto.

Equipos y materiales

- Dos carritos, uno de ellos con sistema de accionamiento por resorte
- Una regla de 1 m
- Prensas
- Papel bond, papel carbón
- Esfera para plomada, hilo
- Esferas de diferentes tamaños
- Cinta adhesiva
- Rampa curva
- Dos láminas de madera





Montaje de la práctica

Figura 22.4. Esquema del montaje para la explosión de los carritos

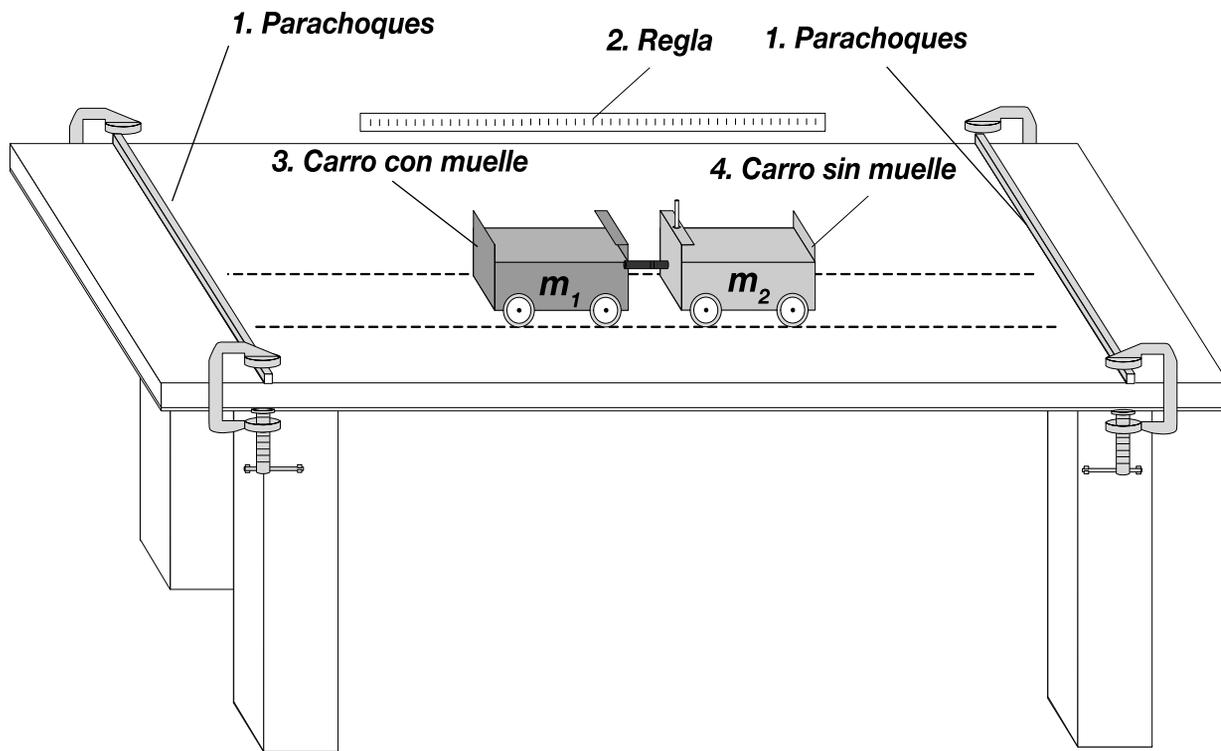
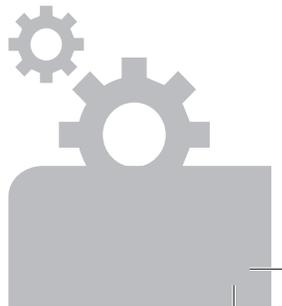
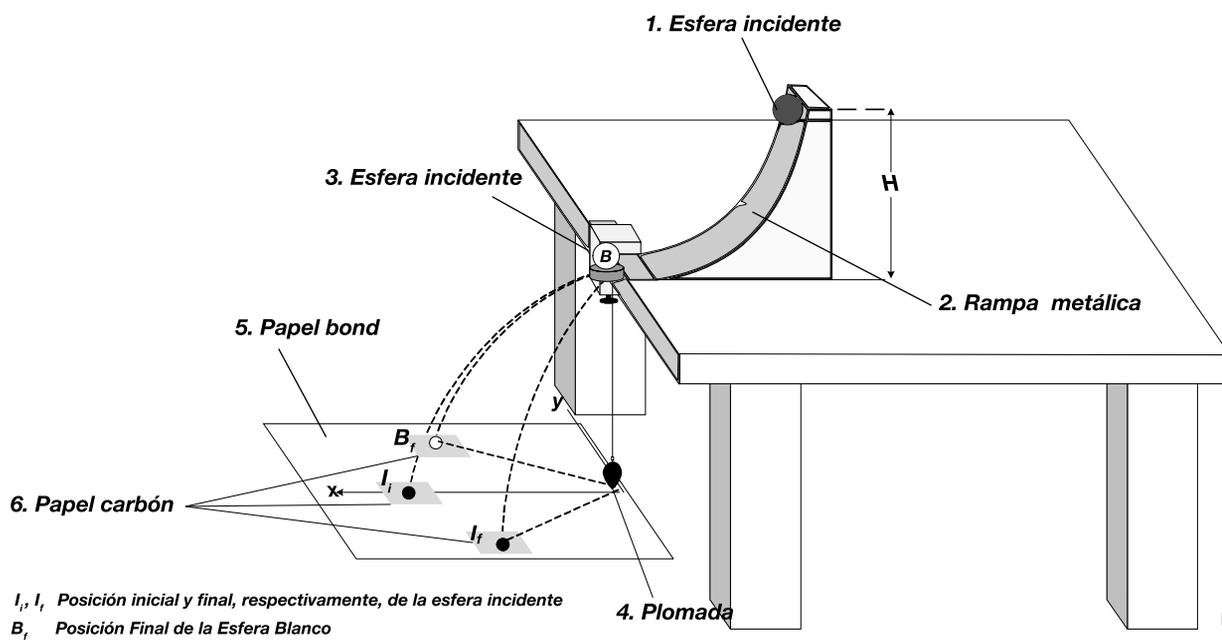


Figura 22.5. Esquema del montaje y toma de datos para la colisión bidimensional





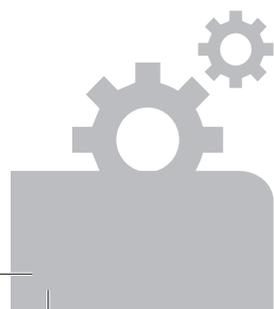
Procedimiento para la recolección de los datos

Parte I

1. Presta atención a las instrucciones del docente respecto a esta parte de la práctica.
2. Verifica que el montaje de la práctica esté de acuerdo con el esquema mostrado en la figura 22.4. Si se presentan dudas, consultar al profesor [3].
3. Mide la masa de cada carro.
4. Realiza la explosión del sistema, activando el mecanismo de disparo del carro 1.
5. Realiza los ajustes de distancia entre cada carro y el parachoques correspondiente, de modo que cada carro, una vez realizada la explosión, tarde el mismo tiempo en chocar con el referido parachoques (esto se percibirá cuando el sonido del impacto de cada carro con el parachoques sea al unísono). Registra los datos de masa y distancia cuando se cumpla dicha condición (tabla 22.1).
6. Una vez cumplida la condición anterior, repite la experiencia dos veces más, buscando perfeccionar la experiencia mediante el ajuste de las distancias; registra las distancias correspondientes.
7. Agrega masas a los carros según las instrucciones del profesor y repite los pasos 5 y 6.

Tabla 22.1. Cuadro para el registro de los datos de la parte I

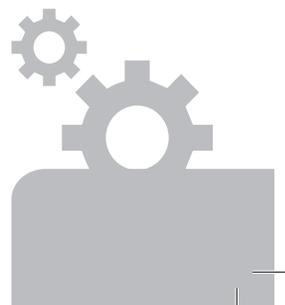
m_1	x_{1f}	p_{1f}	m_2	x_{2f}	p_{2f}	p_{final}





Parte II

1. Presta atención a las instrucciones del docente respecto a esta parte de la práctica [3].
2. Chequea el montaje de la práctica, comparando con el esquema mostrado en la figura 22.5. De existir dudas, consulta al docente.
3. Adhiere, mediante cinta adhesiva, el papel bond al piso.
4. Marca en el papel bond, con un lápiz o marcador, el punto en el que la plomada hace contacto con este.
5. Selecciona dos esferas de igual masa y diámetro.
6. Fija una altura en la rampa y escoge una de las esferas como esfera incidente.
7. Deja caer cinco veces la esfera incidente a través de la rampa, colocando el papel carbón en el punto indicado, de forma que se marque la huella en él cada vez que dicha esfera choque contra el piso.
8. Identifica adecuadamente cada una de las huellas dejadas por la esfera incidente en su choque con el piso.
9. Coloca la segunda esfera, denominada esfera blanco, identificada como B en la figura 22.5, asegurando que la posición de esta presente cierta desviación respecto a la trayectoria de la esfera incidente (parámetro b de la colisión bidimensional).
10. Deja caer la esfera incidente de modo que, en su movimiento, golpee a la esfera blanco; marca y diferencia en el papel bond las huellas dejadas por ambas esferas en su choque contra el piso.
11. Repite la experiencia para dos esferas de masas y tamaños desiguales.
12. Una vez culminada la experiencia, cada grupo debe llevarse el papel bond donde se registraron las huellas de las esferas con el fin de que dispongan de los datos suficientes para el estudio de la conservación del momento lineal en dos dimensiones.





Cálculos

En función de la tabla 1, y con los datos obtenidos, comprueba la conservación de momento lineal en los dos casos expuestos en el presente laboratorio y justificar los respectivos cálculos.

Características del informe técnico

El informe técnico deberá incluir los siguientes elementos [3]:

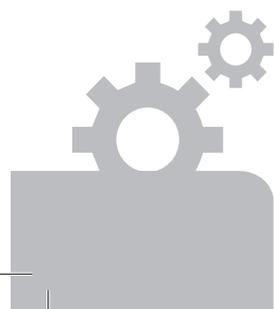
- Portada
- Introducción
- Fundamentación teórica
- Procedimientos
- Cálculos y resultados
- Conclusiones
- Referencias

Referencias

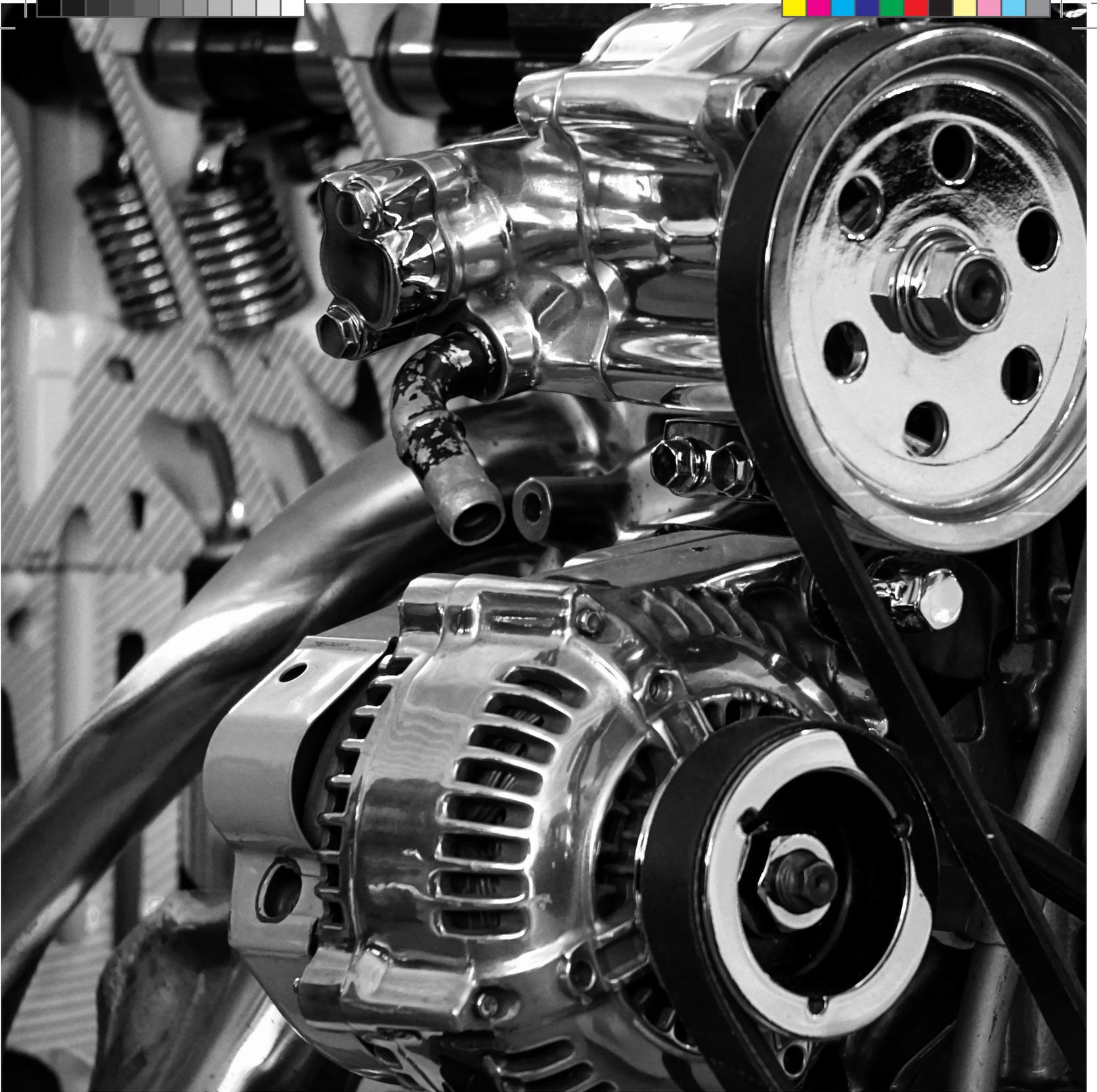
[1] H. D. Young y R. A. Freedman, eds. *Sears-Zemansky: Física universitaria, volumen 1*. Ciudad de México, Pearson Educación, 2009.

[2] D. Giancoli. *Física General Vol. I*. Ciudad de México, Prentice Hall, 2001.

[3] J. Marcano, J. *Manual de laboratorio de Física I*. Puerto Ordaz, Venezuela. Instituto Universitario Politécnico Experimental Guayana, Departamento de Estudios Generales, Sección de Física, 1985







Lo que revisaremos en este capítulo:

- ▶ Conoceremos las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en los capítulos previos
- ▶ Conoceremos una aplicación de laboratorio sobre la conservación de la energía mecánica
- ▶ Tomaremos datos experimentales





Práctica 5

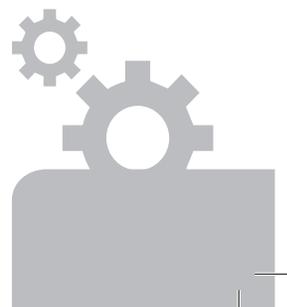
Conservación de la energía mecánica

Objetivo general

Verificar el teorema de conservación de la energía mecánica.

Objetivos específicos

- Desarrollar el modelo teórico a través del cual se demostrará la conservación de la energía mecánica para las experiencias objeto de observación.
- Confirmar el teorema de la conservación de la energía mecánica en una rampa semicircular.
- Demostrar el teorema de la conservación de la energía mecánica usando un sistema de péndulo simple.





Fundamentos teóricos

Energía mecánica

Se denomina energía mecánica a la suma de las energías cinética y potencial. Cabe destacar que, en lo que respecta a la energía cinética, esta abarca la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional; mientras que la energía potencial comprende la potencial gravitatoria y la potencial elástica. Además, por ser energía, expresa la capacidad que poseen los cuerpos con masa de realizar trabajo [1-2].

Conservación de la energía mecánica

En sistemas conservativos (ausencia de fricción) la energía se conserva en el tiempo, lo cual quiere decir que:

$$E_m = E_c + E_p = \text{Constante} \quad (19.32)$$

En otras palabras, entre dos puntos A y B, se cumplirá que:

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB} \quad (19.33)$$

No está de más acotar, como ya se dijo, que, en presencia de fricción, la energía mecánica no se conserva, debido a que parte de esta se disipa en calor.

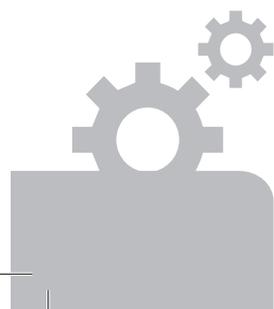
Energía cinética de una partícula

Es definida como la energía asociada al movimiento traslacional, la cual depende de la masa y la rapidez, según la relación:

$$E_c = \frac{1}{2} mV^2 \quad (19.34)$$

Energía cinética de un cuerpo rígido

Se entiende por cuerpo rígido aquel que está conformado por muchas partículas, siendo su característica esencial que la posición relativa entre las partículas que lo integran no cambia, es decir, la distancia entre una y otra siempre es la misma.





Ahora bien, en lo que respecta al movimiento de un cuerpo rígido, se considerarán los siguientes casos: a) deslizamiento; b) rotación pura; c) movimiento de rodamiento. Para el primer caso, el cuerpo rígido es visto como una partícula que a su vez representa el centro de masa del cuerpo; su energía cinética se obtiene por medio de la ecuación 23.3. La segunda condición trata de un cuerpo que rota alrededor de un eje fijo o estacionario que pasa por su centro de masa; posee solo energía cinética rotacional (EcR), la cual se calcula por medio de la expresión:

$$E_{\text{CR}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad (19.35)$$

Donde:

ICM: momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro de masa

ω : rapidez angular del cuerpo

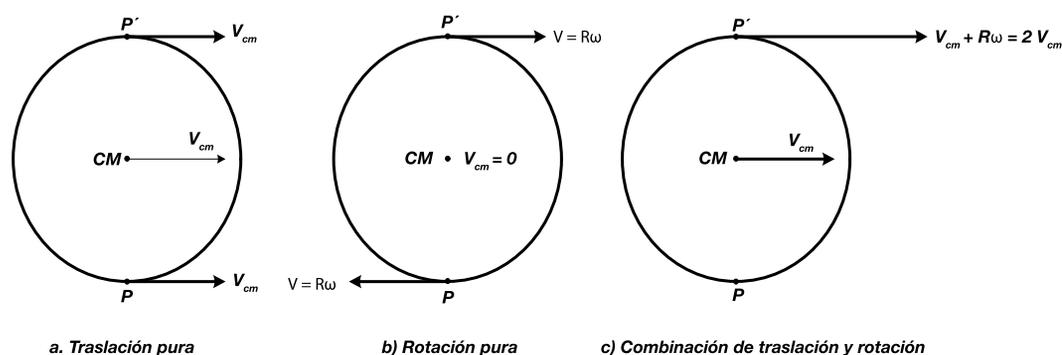
El tercer caso estudia los fenómenos de traslación y rotación combinadas, movimiento atribuible a cuerpos como cilindros y esferas. Una forma de modelar el movimiento de rodamiento es mediante la combinación de los movimientos de traslación pura (deslizamiento) y rotación pura (figura 23.1). Se puede apreciar que el cuerpo con este tipo de movimiento gira instantáneamente alrededor de un eje que pasa por el punto P, punto de contacto del cuerpo con la superficie. Por consiguiente, la energía cinética viene dada como:

$$E_c = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (19.36)$$





Figura 23.1. Modelaje del movimiento de rodamiento
(Fuente: Serway-Beichner 2000)



Para determinar IP se aplica el teorema de Steiner o de los ejes paralelos. Dicho teorema enuncia que el momento de inercia de un cuerpo alrededor de un eje que es paralelo al eje que pasa por el centro de masa es igual al momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, más el producto de la masa por la distancia que separa a ambos ejes, elevada al cuadrado. Expresado matemáticamente:

$$I_P = I_{CM} + MR^2 \quad (19.37)$$

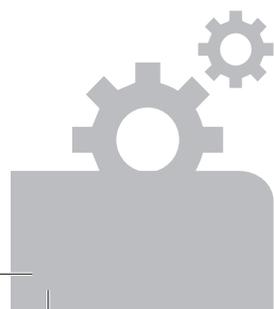
Sustituyendo 23.6 en 23.5, se encuentra que la energía cinética de un cuerpo con movimiento de rodamiento es:

$$E_C = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 \quad (19.38)$$

Ahora, como el punto P de la figura 23.1 instantáneamente está en reposo, se cumple que $V_{CM} = R\omega$, transformándose 23.7 en:

$$E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MV_{CM}^2 \quad (19.39)$$

De la ecuación 23.8 se puede afirmar que la energía cinética de un cuerpo con movimiento de rodamiento es igual a la suma de la energía cinética rotacional





alrededor del centro de masa y de su energía cinética. La expresión 23.8 se puede expresar también en términos de la velocidad del centro de masa como:

$$E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \frac{V_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 \quad (19.40)$$

Energía potencial

La energía potencial es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo en virtud de la configuración que tengan en un sistema de cuerpos que ejercen fuerzas entre sí. Es bueno acotar que la energía potencial no es algo que tenga un cuerpo por sí mismo, sino más bien está asociada con la interacción de dos o más cuerpos. Como elementos de interés, se definirán dentro de este ámbito la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica.

Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria de un objeto de masa M que se encuentra a una altura y de la superficie terrestre se define como:

$$E_{pg} = M g y \quad (19.50)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad.

Energía potencial elástica

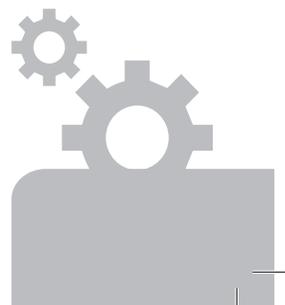
Es la energía acumulada en un cuerpo elástico tal como un resorte. Se determina a través de la siguiente expresión matemática:

$$E_{pE} = \frac{1}{2} kx^2 \quad (19.51)$$

Donde:

k : constante de rigidez del resorte

x : cantidad que se estira o comprime el resorte





Para finalizar en lo que compete al tópico de la conservación de la energía mecánica, y considerando un cuerpo rígido que se traslada rotando desde un punto A a un punto B, la expresión correspondiente será:

$$E_{cTA} + E_{cRA} + E_{pgA} + E_{pEA} = E_{cTB} + E_{cRB} + E_{pgB} + E_{pEB} \quad (19.52)$$

Donde E_{cT} , E_{cR} , E_{pg} y E_{pE} son los términos respectivos de energía cinética traslacional, energía cinética rotacional, energía potencial gravitatoria y energía potencial elástica.

Momento de inercia

El momento de inercia es una medida de la inercia rotacional o la resistencia de un cuerpo a rotar; depende de la distribución de la masa alrededor del eje en que se quiere hacer rotar el cuerpo rígido o sistema discreto de partículas [1-2].

Para un sistema discreto de partículas o masas puntuales, el momento de inercia se define según la siguiente expresión:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (19.53)$$

Donde:

m_i : masa de la i -ésima partícula

r : distancia de la masa de la i -ésima partícula al eje de rotación

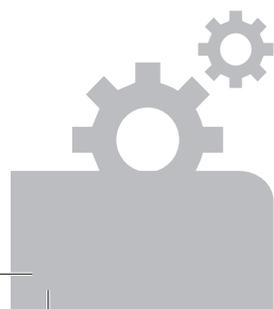
Ahora bien, cuando se estudia un sistema continuo de masa, el momento de inercia viene dado por:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV \quad (19.54)$$

Donde:

\int_V : integral sobre todo el volumen del cuerpo

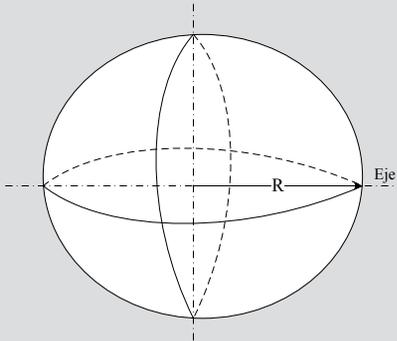
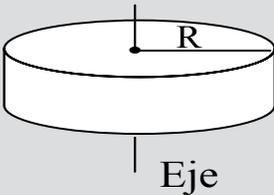
r : distancia del elemento diferencial de masa (dm) al eje de rotación.





El momento de inercia para cuerpos regulares se encuentra tabulado en textos de física y mecánica racional, entre otros. La tabla 23.1 muestra el momento de inercia de una esfera y un cilindro sólido.

Tabla 23.1. Momento de inercia de una esfera y un cilindro sólido, alrededor de un eje que pasa por su centro de masa

Objeto	Figura	Momento de inercia
Esfera maciza y eje a través del centro		$2/5 MR^2$
Cilindro sólido de radio R y eje a través del centro.		$1/2 MR^2$

Equipos y materiales

- Rampa semicircular
- 2 esferas metálicas de diferente tamaño
- Papel carbón, papel bond, cinta adhesiva, hilo y hojilla
- Esferas con gancho
- Plomada





Montaje de la práctica

Figura 23.2. Montaje para experimento de conservación de la energía mecánica, empleando una rampa semicircular

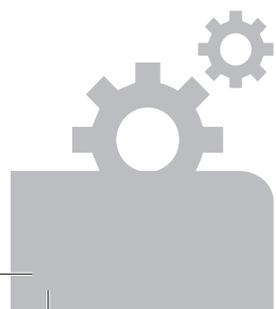
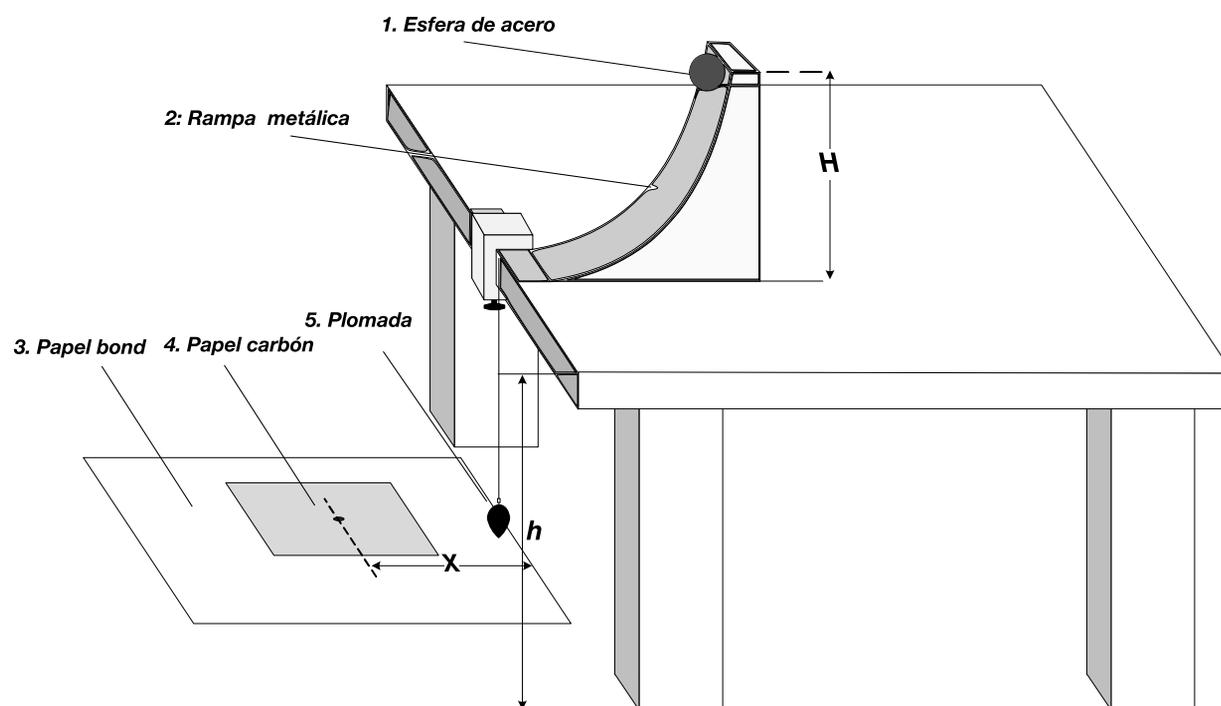
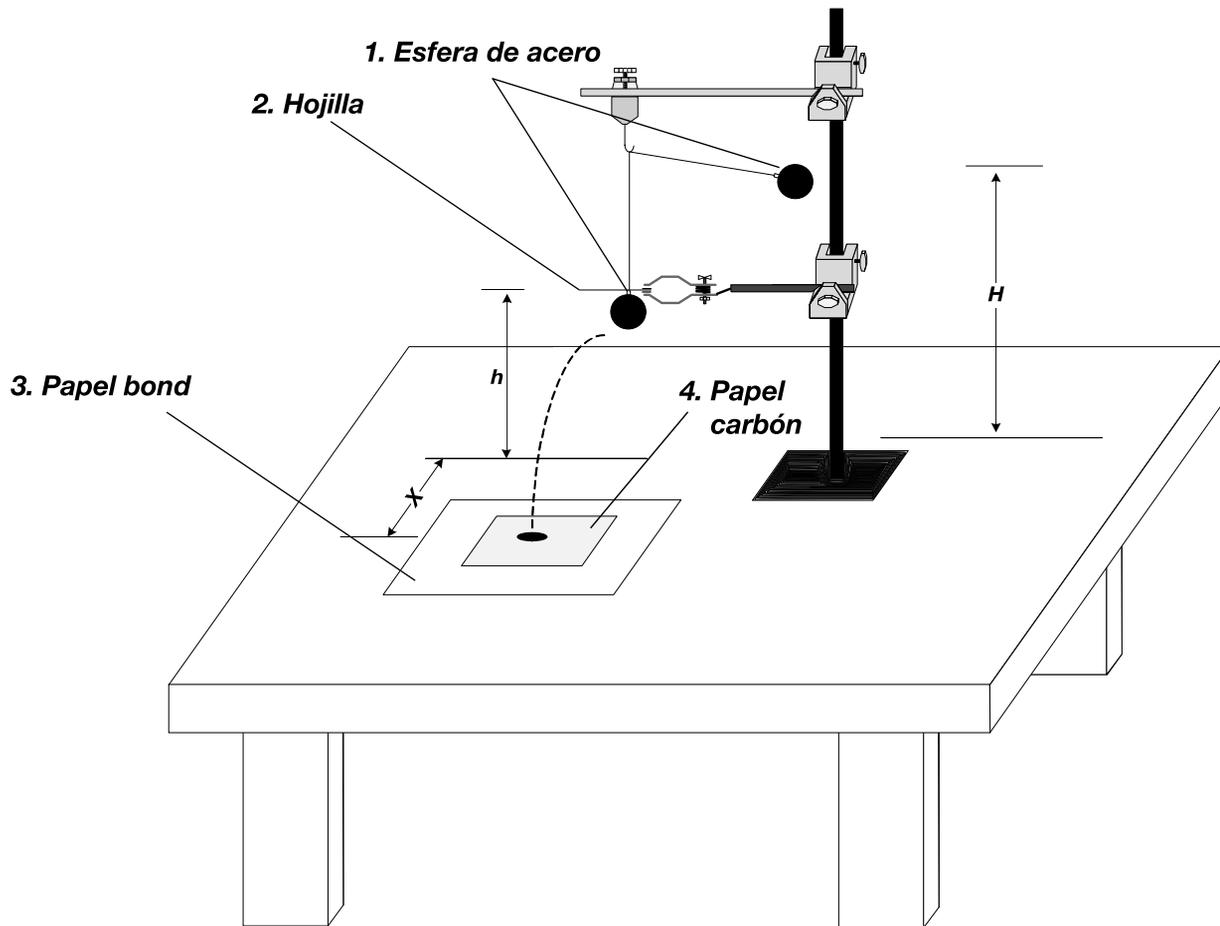




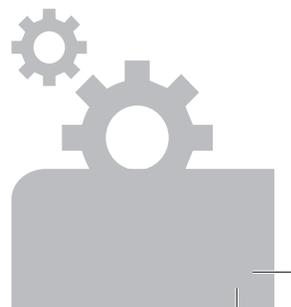
Figura 23.3. Montaje para experimento de conservación de la energía mecánica, empleando un péndulo



Procedimiento para la recolección de los datos

Parte I

1. La figura 23.2 muestra un esquema de la primera experiencia que se debe realizar. Esta consta de un sistema formado por una rampa semicircular conectada a un mesón, una lámina de papel bond, y varias hojas de papel carbón colocadas sobre este. El experimento consiste en dejar caer, desde diversas posiciones de la rampa, esferas metálicas de masa diferente, registrando las alturas desde donde se suelta cada esfera y el alcance logrado por esta a nivel del suelo. A continuación, se describen los pasos para el desarrollo de la experiencia [3].





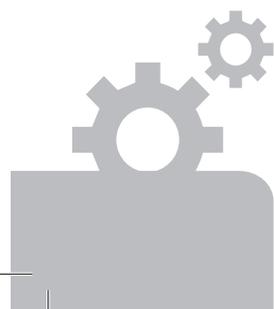
2. Selecciona dos esferas metálicas de diferente tamaño, y mide su diámetro y masa.
3. Coloca una lámina de papel bond sobre el piso, y adhiérela a este mediante cinta adhesiva.
4. Sitúa la plomada tal como se muestra en la figura 23.2, y marca con un lápiz el punto en que la esfera hace contacto con el papel bond.
5. Deja caer cada esfera desde dos alturas diferentes sobre la rampa; realiza, para cada altura en particular, 10 lanzamientos, y mide a su vez los alcances respectivos a cada lanzamiento.
6. Dibuja una tabla para el registro de los datos, de acuerdo con el siguiente modelo.

Tabla 23.2. Modelo de tabla para el registro de los datos colectados en la parte I

Alcance	$M_1 =$		$M_2 =$	
	$H_1 =$	$H_2 =$	$H_1 =$	$H_2 =$
X_1				
X_2				
.				
.				
X_{10}				

aParte II

1. La figura 23.3 muestra un esquema de la experiencia que se va a llevar a cabo. En esta se representa una esfera metálica que pende de un hilo (péndulo), la cual se separará de su posición de equilibrio para luego ser soltada. En su movimiento, el hilo que sostiene a la esfera es cortado por una hojilla, lo que provoca que esta describa una trayectoria semiparabólica, hasta chocar con la superficie de la mesa. En esta experiencia se debe registrar la altura, respecto a la superficie de la mesa, desde donde se suelta la esfera, la altura a la que se encuentra la hojilla y la distancia sobre la superficie





de la mesa que alcanza la esfera; dicha distancia se mide desde el punto obtenido por la proyección de la esfera colgante, en su posición de equilibrio, a la superficie de la mesa y el punto o huella que esta deja al chocar con la superficie de la mesa. En concreto, ejecuta los siguientes pasos {3}:

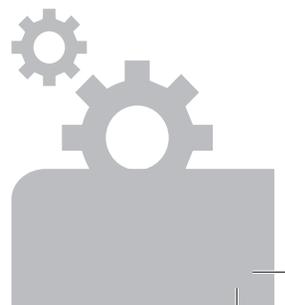
2. Desplaza de la posición de equilibrio la masa del péndulo (masa 2), de forma que alcance cierta altura H respecto a la superficie de la mesa. Suéltala y marca la huella dejada por dicha esfera al tocar el piso. Repite 10 veces el lanzamiento para la misma altura.
3. Repita el paso 2 para dos alturas más, registrando los datos en una tabla como la siguiente.

Tabla 23.3. Tabla de recolección de datos para cada una de las esferas

Alcance	M = h=		
	$H_1 =$	$H_2 =$	$H_3 =$
X_1			
X_2			
.			
.			
X_{10}			

Cálculos

En función de las tablas 23.2 y 23.3, y con los datos obtenidos, realizar el balance de energía y justifica los respectivos cálculos.





Características del informe técnico

El informe técnico deberá incluir los siguientes elementos [3]:

- Portada
- Introducción
- Fundamentación teórica
- Procedimientos
- Cálculos y resultados
- Conclusiones
- Referencias

Referencias

[1] H. D. Young y R. A. Freedman, eds. *Sears-Zemansky: Física universitaria, volumen 1*. Ciudad de México, Pearson Educación, 2009.

[2] P. Tipler y G. Mosca. *Física para la ciencia y la tecnología*. Reverté, 2005.

[3] C. Guerra-Vela, N. Pinto y J. González-Sánchez. *Manual de laboratorio para física universitaria*. San Juan, Universidad de Puerto Rico, 2008.







Fundamentos de mecánica para ingeniería: teoría y práctica
se terminó de editar
en Quito, Ecuador,
el mes de septiembre de 2021,
bajo la marca

udb
ediciones

siendo el canciller el Dr. Carlos Larreátegui Nardi



